

Scheda di lavoro



PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI

Il principe e il messaggero

«Partito per esplorare il regno di mio padre, percorrevo 40 leghe al giorno. Già all'inizio del secondo giorno di viaggio mi preoccupai di poter comunicare con i miei cari. Fra i cavalieri della scorta scelsi il migliore, Alessandro, e gli chiesi di fare la spola tra la nostra posizione e il castello. Ogni giorno Alessandro percorreva 80 leghe... Oggi ripartirà di nuovo per il castello; ho calcolato che lo potrei rivedere solo fra più di trent'anni.» Quando il principe pronuncia questa frase, quanti giorni sono trascorsi dalla partenza?

(Liberamente ispirato al racconto *I sette messaggeri*, Dino Buzzati, *Sessanta racconti*, Mondadori, 1958)

GIORGIA: «Forse la risposta ce la può dare la legge matematica che regola i successivi incontri fra il principe e il messaggero».

MATTEO: «Potremmo rappresentare la situazione con una tabella...».

► Metti in pratica l'idea di Matteo e utilizza anche una rappresentazione grafica. Se un incontro avviene a una certa distanza dal castello, a quale distanza avviene l'incontro successivo? E in che giorno?

1. Una tabella

Costruisci una tabella che riporti i giorni trascorsi, le distanze del principe e del messaggero dal castello al termine di ogni giorno, la progressione degli incontri (nelle righe in cui avvengono).

GIORNI	DISTANZA PRINCIPE	DISTANZA MESSAGGERO	INCONTRI
1	40	40	incontro 0
2	80	40	
3	120	120	incontro 1
4			

▲ Tabella 1

Prosegui nella compilazione della tabella per una trentina di righe.

2. I grafici

Il principe si muove con velocità costante sempre in una stessa direzione: ciò equivale a dire che le grandezze «distanza del principe dal castello» e «giorni trascorsi» sono direttamente proporzionali.

Per il messaggero le cose non stanno in questi termini, perché, pur mantenendo una velocità costante, egli inverte la direzione del suo cammino ogni volta che arriva al castello o che si ricongiunge con il principe.

Anche aiutandoti con la tabella precedente, in uno stesso sistema di assi cartesiani disegna i grafici che rappresentano le distanze dal castello, rispettivamente del principe e del messaggero, in funzione dei giorni trascorsi.

3. Ragioniamoci sopra

Nella tabella e nel diagramma, noti qualche regolarità che ti consenta di rispondere alla domanda del problema?

.....

4. Un'equazione

Indica con g i giorni trascorsi e con d la distanza del principe dal castello. Qual è la formula che esprime d in funzione di g ?

$$d = \dots\dots$$

Vogliamo ora giustificare la legge che hai trovato nei punti precedenti e che mette in relazione i giorni trascorsi con il numero d'ordine dei successivi incontri.

Per farlo, rispondiamo alla domanda: se un incontro avviene a una certa distanza dal castello, a quale distanza avviene l'incontro successivo?

Fissiamo un incontro particolare, considerando, per esempio, $g_2 = 9$, giorno in cui avviene l'incontro 2, a una distanza $d_2 = 40 \cdot 9 = 360$ leghe dal castello. Cerchiamo a quale distanza avviene l'incontro successivo.

Dopo l'incontro il principe e il messaggero si separano, il primo allontanandosi dal castello a una velocità di 40 leghe al giorno, il secondo dirigendosi verso il castello a una velocità di 80 leghe al giorno. Per poter incontrare nuovamente il principe, il messaggero deve necessariamente ripassare dal luogo dell'incontro del giorno 9 e quindi deve percorrere $2 \cdot 360 = 720$ leghe. Nel frattempo il principe si è spostato di 360 leghe (visto che si muove con una velocità che è la metà di quella del messaggero) e si trova quindi a 720 leghe dal castello.

Riassumendo, a questo punto il messaggero è a 360 leghe dal castello e il principe a 720.

Se indichiamo con x la distanza dal castello in cui avverrà il prossimo incontro, per raggiungere il luogo del nuovo incontro,

- il principe dovrà percorrere una distanza $x - \dots\dots$,
- il messaggero dovrà percorrere una distanza $x - \dots\dots$.

Quanto tempo impiegheranno?

- Il messaggero si muove alla velocità di $\dots\dots$ leghe al giorno, quindi impiega $\frac{x - \dots\dots}{\dots\dots}$ giorni.
- Il principe si muove alla velocità di $\dots\dots$ leghe al giorno, quindi impiega $\frac{x - \dots\dots}{\dots\dots}$ giorni.

Il giorno dell'incontro è lo stesso per entrambi, quindi:

$$\frac{x - \dots\dots}{\dots\dots} = \frac{x - \dots\dots}{\dots\dots}$$

Risolvi l'equazione. Il risultato è $x = \dots\dots$.

Quindi la distanza d_3 dal castello a cui il principe e il messaggero si incontrano di nuovo si ricava da quella del precedente incontro moltiplicando per $\dots\dots$.

Ora conosci la distanza dell'incontro, quindi puoi trovare in quale giorno avviene:

$$g_3 = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \dots\dots$$

g_3 si ricava da g_2 moltiplicando per $\dots\dots$.

I risultati ottenuti sono veri in generale, e non solo se consideri g_2 . Per dimostrarlo, ripeti il procedimento precedente considerando g_n e d_n , giorno e distanza dal castello nell'incontro n , al posto di g_2 e d_2 .

Chiamati g_{n+1} il giorno in cui avviene l'incontro successivo e d_{n+1} la relativa distanza dal castello, valgono le leggi:

$$d_{n+1} = \dots\dots \cdot d_n;$$

$$g_{n+1} = \dots\dots \cdot g_n.$$

Spiega ora la congettura che avevi precedentemente formulato.

.....

