

Scheda di lavoro



PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI

Per bisogno o per curiosità

«Il quinto grado presenta una specie di barriera che gli sforzi degli analisti non hanno ancora potuto superare [...]. Determinare in numeri i valori delle radici è [...] lo scopo della soluzione di tutti i problemi che i bisogni o la curiosità presentano da risolvere.»

(Joseph Louis Lagrange, *Lezioni elementari sulle matematiche*, Giusti, Milano, 1839)

La mancanza di formule risolutive generali per equazioni di grado superiore al quarto ha condotto a sviluppare metodi di calcolo approssimato per determinare le soluzioni di un'equazione. Risolvi in modo approssimato $x^5 + x + 1 = 0$ con un errore massimo di 0,2.

STEFANIA: «Aiutiamoci tracciando per punti il grafico di $P(x) = x^5 + x + 1$. Nell'intervallo $[-1; 0]$ c'è una soluzione, nel punto dove $P(x) = 0$ ».

GIACOMO: «E, negli estremi dell'intervallo, $P(x)$ ha valori di segno opposto: $P(-1) = -1, P(0) = +1$ ».

► Cerca un metodo che sfrutti le osservazioni di Stefania e Giacomo.

1. Il grafico

Verifica le affermazioni di Stefania e Giacomo tracciando il grafico di $P(x)$ per punti o mediante il computer.

Per la ricerca della soluzione dell'equazione $P(x) = 0$, ti proponiamo due metodi diversi.

Entrambi si basano su questo teorema:

Sia $P(x)$ un polinomio; se a e b sono tali che $P(a) \cdot P(b) < 0$, allora esiste un numero c compreso tra a e b tale che $P(c) = 0$.

La condizione $P(a) \cdot P(b) < 0$ indica che i due valori devono avere segno diverso.

Da un punto di vista grafico il teorema ha un'interpretazione intuitiva. Se $P(x)$ è un polinomio, per tracciare il suo grafico partendo da un punto di ascissa a e ordinata negativa e arrivando a un punto di ascissa b e ordinata positiva, devi procedere in modo continuo, senza mai staccare la penna dal foglio. Allora il grafico deve intersecare l'asse x in almeno un punto c .

Ciò equivale a dire che $P(c) = 0$, cioè che c è soluzione dell'equazione $P(x) = 0$.

2. Il metodo di spazzolamento

Chiamiamo e l'errore massimo con cui vogliamo trovare la soluzione.

Il metodo di spazzolamento inizia dando ad a , primo estremo dell'intervallo, un incremento e , ossia considerando $a + e$. Confrontiamo $P(a)$ con $P(a + e)$: se hanno segni diversi, allora fra a e $a + e$ c'è una soluzione dell'equazione $P(x) = 0$. Se invece $P(a)$ e $P(a + e)$ hanno lo stesso segno, ripetiamo il procedimento, ma prendendo come primo estremo $a + e$. Procediamo in questo modo finché non otteniamo due valori del polinomio con segni diversi.

Applica il metodo al nostro esempio, compilando la tabella seguente a partire da $x = -1$ e con $e = 0,2$ e ferman-
doti quando hai ottenuto l'intervallo cercato. Ti può essere utile utilizzare il foglio elettronico.

x	$P(x)$
.....	
.....	
.....	
.....	

▲ Tabella 1

3. Il metodo di bisezione

Per applicare il metodo di bisezione bisogna, prima di tutto, dividere a metà l'intervallo in cui si sa che c'è una so-
luzione. Se a e b sono gli estremi dell'intervallo, allora il punto medio è:

$$m = \frac{a + b}{2}.$$

Se $P(m) = 0$, m è proprio la soluzione cercata, altrimenti confrontiamo il segno di $P(m)$ con quelli di $P(a)$ e di $P(b)$. Se $P(m)$ ha lo stesso segno di $P(b)$, consideriamo come nuovo intervallo $[a; m]$ e ripetiamo il procedimento. Se $P(m)$ ha lo stesso segno di $P(a)$, consideriamo invece l'intervallo $[m; b]$ e ripetiamo il procedimento.

La soluzione cercata è compresa fra gli estremi dell'intervallo, che via via si restringe.

Procediamo fino a quando l'ampiezza dell'intervallo non è minore o uguale a e .

Applica il metodo al problema posto. Ti aiutiamo dandoti lo schema per il primo passo, poi procedi tu.

Primo passo

$$a = \dots\dots; \quad b = \dots\dots; \quad m = \dots\dots$$

$P(m) = \dots\dots$ non è 0, quindi m non è la soluzione dell'equazione.

$$P(a) = \dots\dots; \quad P(b) = \dots\dots$$

$P(m)$ è discorde con $\dots\dots$, quindi scegliamo l'intervallo $\dots\dots$.

L'ampiezza dell'intervallo è $\dots\dots$ e non è minore o uguale a 0,2, quindi $\dots\dots$.

.....

.....

.....

.....

.....