

Scheda di lavoro



PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI

Sempre in fila (e non solo)

Che relazioni esistono fra baricentro, circocentro e ortocentro di un qualunque triangolo?

GIADA: «Io proverei a partire da qualche caso particolare, per esempio da un triangolo rettangolo. Oppure isoscele».

SARA: «Ma quante relazioni ci saranno?».

► Formula congetture relative a due relazioni fra i tre punti notevoli, poi dimostrale mediante la geometria analitica.

1. Due congetture

Dopo aver ripassato le definizioni di baricentro, circocentro e ortocentro di un triangolo, considera per prima cosa qualche caso particolare, per cercare di capire a quali relazioni si riferisce il testo.

Triangolo rettangolo

Disegna un triangolo MNP rettangolo in N . Il cateto MN è l'altezza relativa al cateto NP e viceversa. Ciò significa che l'ortocentro O di MNP è il punto

Inoltre il triangolo, essendo rettangolo, può essere inscritto in una semicirconferenza che ha per diametro
Ciò significa che il circocentro C di MNP è il punto

Adesso sei in grado di affermare che il baricentro G appartiene al segmento OC .

Infatti.....
.....

Quindi, se MNP è rettangolo, i punti O , C e G sono

Ricorda che il baricentro di un triangolo divide ciascuna mediana in due parti tali che

Quindi puoi affermare che $\frac{CG}{CO}$

Triangolo isoscele

Disegna un triangolo MNP isoscele di base MN e sia PH l'altezza relativa alla base. Poiché MNP è isoscele, PH risulta essere anche

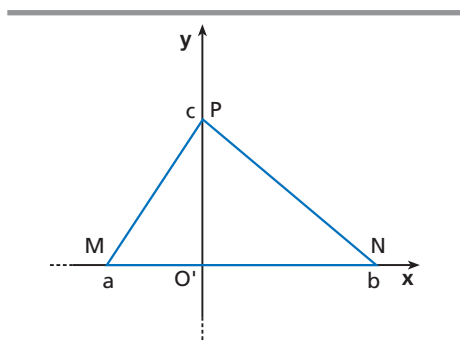
Allora, anche in questo caso, i punti O , C e G sono

Controlla se il rapporto $\frac{CG}{CO}$ è uguale a quello calcolato nel caso precedente. Per questa verifica, aiutati con carta e penna, oppure utilizza un software di geometria dinamica come GeoGebra o Cabri.

2. La dimostrazione

Vogliamo dimostrare attraverso l'utilizzo della geometria analitica che, indipendentemente dalla scelta del triangolo MNP , i tre punti in questione sono allineati e che il rapporto $\frac{CG}{CQ}$ è costante.

Scegli un sistema di riferimento opportuno $xO'y$, posizionando gli assi in modo che M e N siano sull'asse x e P sia sull'asse y (per l'origine usiamo la lettera O' per distinguerla da O , con la quale abbiamo indicato l'ortocentro).



◀ **Figura 1**

Le coordinate dei punti sono:

$$M(a; 0), \quad N(\dots\dots; \dots\dots), \quad P(\dots\dots; \dots\dots).$$

Cerchiamo le coordinate dei punti O , C e G .

Ortocentro O

Osserva che l'altezza relativa al lato MN coincide con

Trova l'equazione della retta che contiene l'altezza relativa al lato MP . Tale altezza è perpendicolare alla retta MP , che ha coefficiente angolare uguale a

Quindi, il coefficiente angolare cercato è

Fai attenzione: i coefficienti angolari che hai calcolato sono definiti se e solo se

Puoi escludere i casi in cui tali coefficienti non sono definiti. Infatti

Ora puoi trovare l'equazione dell'altezza relativa a MP , di cui conosci il coefficiente angolare, imponendo il passaggio per il punto

Per trovare le coordinate dell'ortocentro O , devi mettere a sistema le equazioni delle due rette.

.....

.....

.....

.....

Circocentro C

Il punto medio del lato MN ha coordinate e quindi l'asse del segmento MN ha equazione

L'asse del segmento MP ha lo stesso coefficiente angolare dell'altezza relativa al segmento MP . Imponendo il passaggio per il punto medio di MP , trovi l'equazione dell'asse del segmento MP :

Ora metti a sistema le equazioni dei due assi e trova le coordinate del circocentro C .

.....

.....

.....

.....

Baricentro G

Puoi trovare le coordinate del baricentro mettendo a sistema le equazioni di due delle mediane del triangolo. In alternativa, puoi calcolare direttamente le coordinate del baricentro tenendo presente che sono la media aritmetica delle coordinate dei tre vertici del triangolo.

.....

.....

.....

.....

Allineamento e rapporto

Ora che hai calcolato le coordinate dei tre punti, puoi dimostrare che essi sono allineati verificando che i coefficienti angolari di OC e OG sono

I coefficienti angolari di questi segmenti sono definiti se e solo se

Puoi escludere i casi in cui questi coefficienti non sono definiti. Infatti

Per finire, calcola le misure dei segmenti CG e CO . Il loro rapporto è:

$$\frac{\overline{CG}}{\overline{CO}} = \dots\dots$$