Scheda di lavoro

PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI

Una cifra dopo l'altra

Ci sono filastrocche in diverse lingue per ricordare le prime cifre di π. Basta contare il numero di lettere delle parole. Ecco come inizia una in francese: *Que j'aime à faire apprendre ce nombre utile aux sages* ... (31415926535).
Ma come si calcolano le cifre di π? Determina una procedura per ottenere approssimazioni sempre migliori di π.

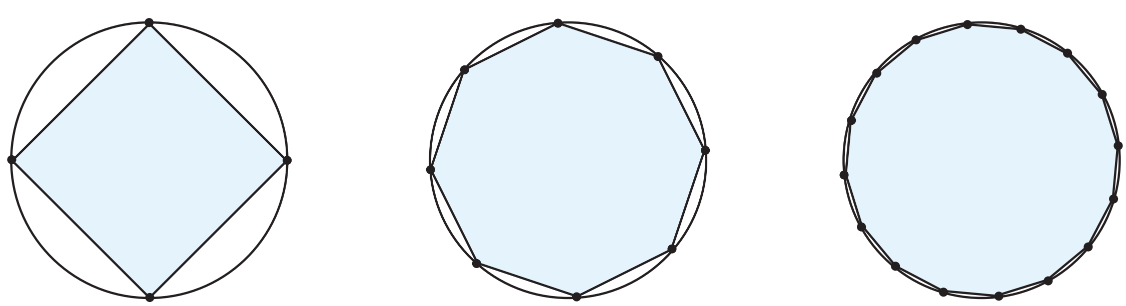
VALERIA: «π è il rapporto fra la misura di una circonferenza e quella del suo diametro: potremmo partire da lì».

CLAUDIO: «E la lunghezza di una circonferenza è approssimata sempre meglio dai perimetri dei poligoni regolari inscritti, all'aumentare del numero dei lati».

▶ Considera poligoni regolari inscritti di 4, 8, 16, 32, … lati. Cerca una formula che, noto il lato di uno di questi poligoni, permetta di calcolare quello del poligono che ha il doppio dei lati. Calcola poi i perimetri dei poligoni, a partire da quello del quadrato…

1. Costruire i poligoni regolari con riga e compasso

Costruisci con riga e compasso un quadrato inscritto in una circonferenza. Per farlo, dopo aver tracciato un diametro, ...
....
....
Per costruire ora il poligono regolare di otto lati, partendo dal quadrato precedente, puoi tracciare gli assi dei lati e
....
....
Analogamente, per costruire il poligono regolare di sedici lati ....
....
....
Continuando così, puoi ottenere una sequenza di poligoni regolari inscritti il cui perimetro approssima sempre meglio la lunghezza della circonferenza.

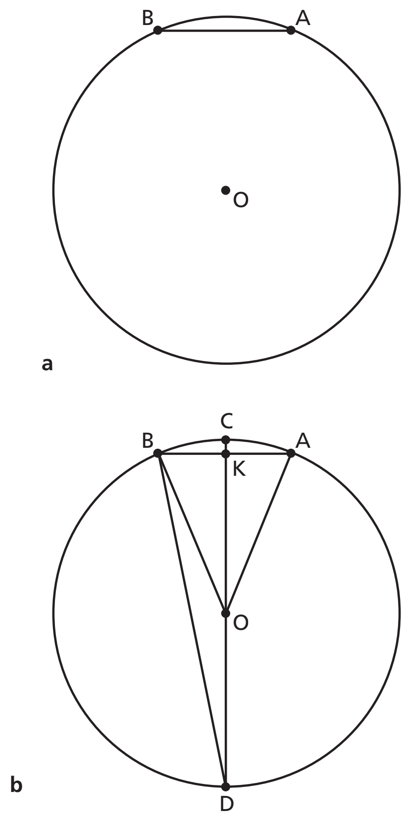


▲ Figura 1

Poiché π è il rapporto fra la misura di una circonferenza e quella del suo diametro, puoi calcolare un'approssimazione di π mediante il rapporto tra il perimetro di un poligono regolare inscritto e la lunghezza del diametro. Avrai approssimazioni sempre migliori all'aumentare del numero dei lati.

2. Dal lato di un poligono a quello del poligono con il doppio dei lati

Supponi ora che l_n sia la misura del lato di un poligono regolare di n lati inscritto in una circonferenza di raggio r e centro O.
Per determinare una formula che lega l_n alla misura del lato del poligono regolare che ha il doppio dei lati, cioè l_{2n}, procedi nel seguente modo.



▲ **Figura 2**

Traccia AB, uno dei lati del poligono regolare di n lati inscritto (figura 2a). $\overline{AB} = l_n$. Abbiamo visto che, per ottenere il lato del poligono regolare inscritto di $2n$ lati, è sufficiente tracciare l'asse del segmento AB, determinando due punti C e D sulla circonferenza (figura 2b). Il segmento BC è il lato del poligono regolare inscritto di $2n$ lati. Quindi $\overline{BC} = l_{2n}$.

Per cercare il legame fra BC e AB, ossia fra l_{2n} e l_n, considera prima di tutto il triangolo DBC, che è un triangolo ……………, in quanto ………………..
Puoi quindi applicare al triangolo DBC il secondo teorema di Euclide:

$\overline{BK}^2 = \ldots\ldots .$

Da questa relazione, essendo $\overline{DC} = 2r$, $DK = DC - \ldots\ldots$ e $\overline{BK} = \dfrac{l_n}{2}$, ricava $\overline{CK}$ in funzione di l_n:

$$\ldots\ldots = \overline{CK} \cdot (2r - \ldots\ldots) \rightarrow \ldots\ldots - 2r \cdot \ldots\ldots + \frac{l_n^2}{4} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{CK} = \frac{2r - \sqrt{4r^2 - l_n^2}}{2} .$$

Nell'equazione precedente la soluzione $\dfrac{2r + \sqrt{4r^2 - l_n^2}}{2}$ non è accettabile, in quanto ……………………………………………………………
Anche il triangolo BCK è ……………, quindi puoi applicare il teorema di …………… ottenendo:

$\overline{BC}^2 = \ldots\ldots + \ldots\ldots .$

Sostituendo le espressioni delle misure nella relazione si ha

$$\overline{BC}^2 = \ldots\ldots + \left(\frac{2r - \sqrt{4r^2 - l_n^2}}{2}\right)^2 = \ldots\ldots + \frac{\ldots\ldots + \ldots\ldots - \ldots\ldots - 4r\sqrt{4r^2 - l_n^2}}{4} = 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - l_n^2} ,$$

da cui:

$$\overline{BC} = l_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - l_n^2}} .$$

La relazione lega, in una circonferenza di raggio r, la misura del lato del poligono regolare inscritto di $2n$ lati a quella del lato del poligono regolare inscritto di n lati.
Puoi ora dedurre che la misura del perimetro del poligono regolare inscritto di $2n$ è ………… .

3. Approssimazioni sempre migliori di π

Data una circonferenza di raggio r, la misura del lato del quadrato inscritto è ……, quindi il suo perimetro misura …… .

Tenendo conto che $\pi = \frac{C}{d}$, dove C è la misura della circonferenza e d quella del diametro, una prima (e poco accurata) approssimazione di π si ottiene calcolando il rapporto …… = …… .

Calcola la misura del perimetro dell'ottagono inscritto a partire dalla misura del lato del quadrato inscritto, utilizzando la formula determinata in precedenza. Dividendo questo risultato per ……, otterrai come nuova approssimazione di π il valore …… .
Analogamente ricava la misura del perimetro del poligono regolare di sedici lati inscritto nella circonferenza e ottieni …… .
Puoi procedere in questo modo un numero arbitrario di volte, trovando approssimazioni di π sempre più precise, effettuando i calcoli con l'aiuto di una calcolatrice o di un foglio elettronico.

……
……
……
……
……