Scheda di lavoro

PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI

Positivo al test!

Per avere informazioni sulla diffusione di una malattia, si fanno test diagnostici non invasivi e poco costosi, ottenendo una prima informazione, da sottoporre a verifiche più approfondite nei casi di esito positivo.
Supponiamo che si sappia che la probabilità che il test funzioni correttamente nel caso di individui malati (ossia risulti positivo) sia del 99%, mentre quella che il test funzioni correttamente nel caso di individui sani (ossia risulti negativo) sia del 99,5%. Se si sa anche che la probabilità di avere quella malattia è dello 0,5%, qual è la probabilità che un individuo positivo al test sia davvero malato?

FRANCA: «Se il test è positivo, il paziente è malato almeno al 90%!».

MARCO: «Però la malattia è poco diffusa; intendo dire che è raro che un individuo testato sia malato, quindi la probabilità dovrebbe essere molto più bassa del 99%, direi anche molto più bassa del 90%».

▶ Chi ha ragione, secondo te? Costruisci un diagramma ad albero delle situazioni possibili; poi usa il teorema del prodotto per eventi dipendenti…

1. Scrivi i dati iniziali

Scrivi tutti i dati a tua disposizione.
Probabilità che:

- un individuo estratto a caso dalla popolazione abbia la malattia: $p(M) = \ldots\ldots;$
- il test dia esito positivo (P) se l'individuo è malato (M): $p(P|M) = \ldots\ldots;$
- il test dia esito negativo (N) se l'individuo è sano (S): $p(N|S) = \ldots\ldots.$

2. Calcola le probabilità degli eventi contrari

Tenendo conto che:

- gli individui della popolazione possono essere solo sani o malati,
- sia nel caso di individui sani, sia nel caso di individui malati, il test può dare solo esito positivo o negativo,

ricava, la probabilità che:

- un individuo estratto a caso dalla popolazione sia sano: $p(S) = \ldots\ldots;$
- il test dia esito positivo se l'individuo è sano: $p(P|S) = \ldots\ldots;$
- il test dia esito negativo se l'individuo è malato: $p(N|M) = \ldots\ldots.$

3. Organizza i dati

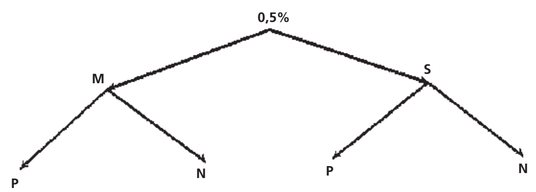
Utilizzando i dati iniziali e i risultati finora ottenuti, mediante il teorema del prodotto per eventi dipendenti, puoi calcolare, per esempio, la probabilità dell'evento intersezione degli eventi Malato e Positivo come prodotto fra la probabilità che una persona risulti malata per la probabilità che una persona risulti positiva al test essendo malata:

$$p(M \cap P) = p(M) \cdot p(P|M) = \ldots\ldots.$$

Analogamente calcola:

$p(M \cap N) =$ .... ;
$p(S \cap N) =$ .... ;
$p(S \cap P) =$ ....

Puoi controllare il tuo procedimento completando il seguente diagramma ad albero.



◄ **Figura 1**

Ora completa la seguente tabella.

TEST \ MALATTIA	*M*	*S*	TOTALE
P			
N			
Totali	0,005	0,995	1

In questo modo i dati a tua disposizione sono ben organizzati e immediatamente reperibili.

4. Risolvi il problema

La probabilità che stiamo cercando, ossia che un individuo estratto a caso dalla popolazione e risultato positivo al test abbia davvero la malattia, in simboli si può indicare con $p(\ldots|\ldots)$.

Per calcolarla puoi applicare il teorema del prodotto fra eventi dipendenti, utilizzando ancora M e P, ma in un diverso ordine rispetto a quello che abbiamo scritto nel punto 3:

$$p(M \cap P) = p(\ldots) \cdot p(\ldots|\ldots).$$

Ricavando le informazioni che ti servono dalla tabella, calcola la probabilità cercata.

....
....