Strette di mano

Stringersi la mano serve per presentarsi e anche per dimostrare la propria amicizia.

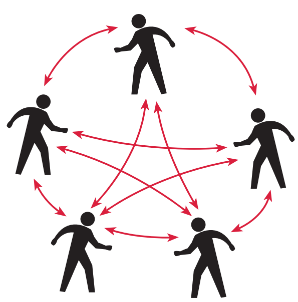
- **Nelle prossime pagine ti proponiamo occasioni per stringere la mano ai tuoi compagni e all'insegnante che ti seguirà, oltre che a noi autori del libro.**
- **È un modo per conoscerci e riflettere su cosa pensiamo della matematica, su cosa sappiamo e su cosa studieremo.**
- **È anche un modo per andare alla scoperta del libro, capire che cosa offre e come utilizzarlo al meglio.**

Iniziamo con un problema in tema!

Quante strette di mano diverse si possono scambiare gli studenti di una classe?

Naturalmente stiamo pensando che tutti gli studenti si stringano la mano e ogni coppia di studenti se la stringa una volta sola.
Prima di leggere la soluzione che proponiamo nelle righe seguenti, chiudi il libro e prova a cercarne una insieme ai tuoi compagni, magari cogliendo l'occasione per stringere loro la mano davvero!

Soluzione



- Il numero di strette di mano varia in base al numero dei componenti della classe o, più in generale, del gruppo di persone che le stringono.
- Per cercare la soluzione generale, concentriamoci prima su un esempio con un numero ridotto di persone in modo da poter costruire uno schema grafico.
  Nello schema della figura abbiamo pensato a 5 ragazzi.
- Notiamo che ogni ragazzo stringe la mano ai 4 rimanenti; quindi, essendo i ragazzi 5, possiamo pensare a $5 \cdot 4$ strette di mano.
- Ma in questo modo abbiamo contato ogni stretta di mano 2 volte, corrispondenti alle 2 punte di freccia che ci sono nello schema per ogni linea. Le punte sono 20, le linee 10.
- Quindi le strette di mano sono: $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$.

Pensiamo ora a n persone che si stringono la mano (con n indichiamo un numero generico). Il ragionamento è del tutto simile a quello precedente: ognuno stringe la mano a $n-1$ persone.
Le strette di mano sono quindi: $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$.

? Allora, quante strette di mano sono possibili nella tua classe?

Copyright © 2012 Zanichelli editore S.p.A., Bologna
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

Risolvere problemi

«Il prezzo scontato di un computer è di 400 euro.

Sapendo che lo sconto è stato del 25%, posso affermare che prima dello sconto il computer costava 500 euro.»

È giusto questo ragionamento?

Prima di rispondere

PERCENTUALI CHE INGANNANO

«Sono soddisfatto delle azioni che ho comprato. In questo giornale, per ogni mese, è riportata la percentuale di aumento o diminuzione del valore rispetto all'inizio del mese. È vero che in un mese le azioni hanno perso il 40% del loro valore, ma il mese dopo hanno guadagnato il 50%. Quindi in due mesi il loro valore è aumentato del 10%. Non male!»

▶ **È giusto questo ragionamento?**

Supponiamo che all'inizio del primo mese un'azione avesse valore 100.
Dopo un mese il suo valore è diminuito del 40% e quindi è sceso a 60.
Alla fine del secondo mese si è avuto un aumento del 50% rispetto al valore di inizio mese, quindi un aumento di:

$$\frac{50}{100} \cdot 60 = 30.$$

Il valore finale è quindi: $60 + 30 = 90$.
Rispetto a due mesi prima, il valore è calato del 10% e non aumentato del 10%!
Come vedi, con le percentuali è molto importante fare attenzione a quale quantità si riferiscono.

ALLA SCOPERTA DEL LIBRO

Usa l'*indice* per cercare il *paragrafo* della teoria sulle percentuali. In corrispondenza c'è anche un paragrafo con *esercizi guida* ed *esercizi*.

UP TO YOU

«Qualcuno dice che sto cercando di guadagnare troppo. È falso! L'anno scorso guadagnavo il 20% rispetto al prezzo dei prodotti che vendevo, quest'anno il 22%. Un guadagno di appena il 2% in più: non è poi tanto!»

È giusto questo ragionamento?

ALLA SCOPERTA DEL LIBRO

Trovi due problemi sulle percentuali anche nella sezione *Test your skills* degli esercizi del capitolo 1, che sono nell'e-book e online.

Ora risolvi il problema iniziale

Nel sito: ▶ Scheda di lavoro

Per approfondire **Sconti su sconti**

«Il supermercato dove faccio spese ha molti prodotti in offerta "Prendi due, paghi uno". In più, alla cassa, viene dato un buono pari al 20% dell'importo pagato, da utilizzare in una spesa successiva. Se compero soltanto prodotti in offerta, è come se avessi lo sconto del 70%.»

È giusto questo ragionamento?

Copyright © 2012 Zanichelli editore S.p.A., Bologna
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

A quale velocità ci muoviamo con la Terra intorno al Sole?

Prima di rispondere

QUARANTA ALL'ORA

Un ciclista ha percorso 50 km di circuito pianeggiante mantenendo una velocità di 40 km/h.

▶ **Quanto tempo ha impiegato?**

Un problema presenta, in genere, una situazione che contiene dati e richieste. Per risolverlo è necessario trovare come le richieste sono legate ai dati.
I dati del nostro problema sono lo spazio percorso (50 km) e la velocità costante mantenuta dal ciclista (40 km/h).
La relazione che lega fra loro dati e richieste afferma che lo spazio s percorso in un tempo t da un corpo che si muove a velocità costante v è dato dal prodotto fra la velocità e il tempo. In simboli: $s = v \cdot t$. Quindi, nel nostro caso, abbiamo l'equazione $50 = 40 \cdot t$.
Ci chiediamo qual è quel numero t che moltiplicato per 40 dà 50.
Per la definizione di quoziente di due numeri, ciò equivale a dire che

$t = \frac{50}{40} = \frac{5}{4} = 1{,}25$ ore, ossia 1 ora e 15 minuti.

ALLA SCOPERTA DEL LIBRO

C'è un *sottoparagrafo* intitolato «Che cos'è un'equazione».

UP TO YOU

Se un ciclista percorre 180 km in 5 ore, qual è la sua velocità media?

? Ora risolvi il problema iniziale

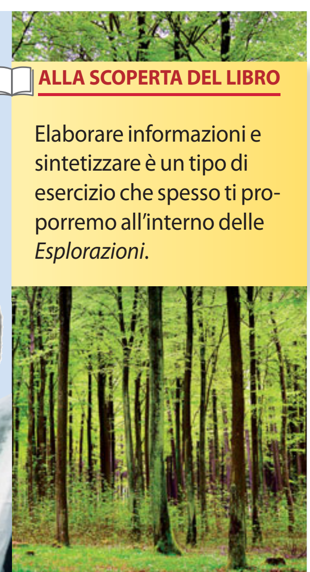
Nel sito: ▶ Esercitazione guidata su *Motori di ricerca* ▶ Esercitazione guidata su *Elaborazione di testi*

In dieci righe

Foreste di carta

Riciclare la carta è importante per ridurre la velocità della deforestazione. Quanti fogli di carta si ricavano da un albero?
Per rispondere alla domanda fai una ricerca in Internet, poi realizza con il computer una sintetica relazione che spieghi come si possa calcolare una stima del numero di fogli formato A4 ricavabili da un pino di circa 10-15 metri. Dai anche informazioni relative alla deforestazione e ai suoi effetti.

Cerca nel web: fogli, carta, albero, deforestazione, effetti.



ALLA SCOPERTA DEL LIBRO

Elaborare informazioni e sintetizzare è un tipo di esercizio che spesso ti proporremo all'interno delle *Esplorazioni*.

Copyright © 2012 Zanichelli editore S.p.A., Bologna
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

Calcolare

ALLA SCOPERTA DEL LIBRO

Trovi la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione, per esempio, nella *Teoria in sintesi* del primo capitolo.

Come si può calcolare a mente, con rapidità, 29 · 8?

Prima di rispondere

CALCOLI E PROPRIETÀ DELLE OPERAZIONI

▶ Come si calcola a mente 42 · 6?

Per eseguire mentalmente moltiplicazioni fra numeri interi, è importante conoscere, oltre alle tabelline, la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione. Questa afferma: quando si deve moltiplicare un numero per una somma, si può moltiplicare quel numero per ciascun addendo della somma e poi sommare i prodotti ottenuti, e il risultato non cambia.

Con le lettere: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
Per esempio: $5 \cdot (2 + 3) = 5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 10 + 15 = 25$.

Utilizziamo questa proprietà per calcolare: $42 \cdot 6$.
Consideriamo 42 come 40 + 2: $42 \cdot 6 = (40 + 2) \cdot 6$
Applichiamo la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione: $42 \cdot 6 = 40 \cdot 6 + 2 \cdot 6$.
Eseguiamo le moltiplicazioni: $42 \cdot 6 = 240 + 12$.
Eseguiamo l'addizione: $42 \cdot 6 = 252$.

UP TO YOU

1. Esegui mentalmente le seguenti moltiplicazioni:
a) $67 \cdot 8$; b) $123 \cdot 20$; c) $12 \cdot 23$.
Giustificale mediante la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione e quella associativa della moltiplicazione.

2. La proprietà distributiva della moltiplicazione vale anche rispetto alla sottrazione. Applicala per calcolare mentalmente:
a) $28 \cdot 3$; b) $190 \cdot 4$; c) $15 \cdot 28$.
Spiega i tuoi passaggi.

? Ora rispondi alla domanda iniziale

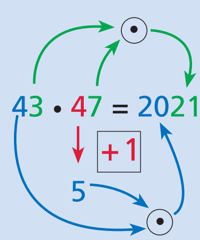
Nel sito: ▶ Scheda di lavoro

Per approfondire

Uno strano calcolo

Per calcolare **43 · 47** procediamo come nella figura:

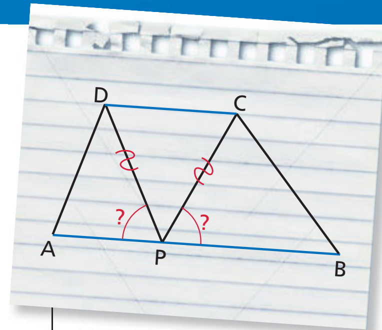
al 4 di 47 aggiungiamo 1: $4 + 1 = 5$;
moltiplichiamo il 4 di 43 con il 5 ottenuto: $4 \cdot 5 = 20$;
moltiplichiamo il 3 di 43 con il 7 di 47: $3 \cdot 7 = 21$;
il risultato è: **2021**.



Giustifica il metodo usato, mediante le proprietà delle operazioni.
Ci sono delle condizioni che ci dicono rapidamente quando possiamo applicare questo metodo?

Copyright © 2012 Zanichelli editore S.p.A., Bologna
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

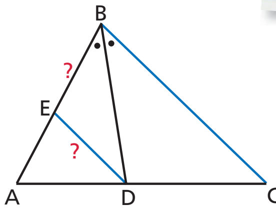
Dimostrare



Nel trapezio *ABCD* della figura il punto *P* è tale che i segmenti *DP* e *CP* sono congruenti. Come sono gli angoli $A\hat{P}D$ e $B\hat{P}C$? Perché?

Prima di rispondere

LA BISETTRICE E LA PARALLELA



In un triangolo qualsiasi *ABC*, chiamiamo *D* il punto di incontro tra la bisettrice dell'angolo in *B* e il lato *AC*. Da *D* tracciamo la retta parallela al lato *BC* e chiamiamo *E* il suo punto di incontro con *AB*.

▶ **Che cosa possiamo dire dei segmenti *DE* e *EB*? Perché?**

Se osservi con attenzione la figura, forse puoi giungere alla conclusione che i segmenti *DE* ed *EB* sono congruenti. Per conferma potresti provare a misurarli: se la loro misura è uguale, allora i segmenti sono congruenti. Tuttavia, queste prove e osservazioni non consentono di essere sicuri che la congruenza dei segmenti continui a essere vera per tutti i triangoli *ABC* che è possibile considerare, né consentono di capire *perché* la proprietà è sempre vera. Per soddisfare queste due esigenze serve una dimostrazione.
Dimostriamo che *DE* ed *EB* sono congruenti utilizzando queste proprietà:

a) Se in un triangolo due angoli sono congruenti, allora i due lati del triangolo che i due angoli non hanno in comune sono congruenti (il triangolo è isoscele);
b) Se due rette sono parallele, tagliate da una trasversale formano angoli alterni interni congruenti.
c) Se x è congruente a y e y è congruente a z, allora x è congruente a z (proprietà transitiva della congruenza).

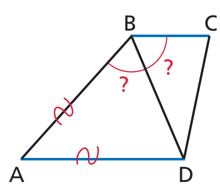
Ipotesi **1.** *BD* è bisettrice di $A\hat{B}C$;
2. *DE* è parallela a *BC*.

Tesi *ED* e *BE* sono congruenti.

Dimostrazione

L'angolo $E\hat{B}D$ è congruente a $D\hat{B}C$, perché, per ipotesi, *BD* è bisettrice dell'angolo $A\hat{B}C$.
Ma $D\hat{B}C$ è congruente a $B\hat{D}E$, perché angoli alterni interni formati dalle parallele *ED* e *BC* tagliate dalla trasversale *BD* (proprietà *b*).
Quindi anche $E\hat{B}D$ è congruente a $B\hat{D}E$ per la proprietà transitiva della congruenza (proprietà *c*).
Allora, per la proprietà *a* il triangolo *EBD* è isoscele e *BE* è congruente a *ED*.

UP TO YOU



Nel trapezio di basi *AD* e *BC* della figura, i lati *AB* e *AD* sono congruenti. Che cosa possiamo dire degli angoli $A\hat{B}D$ e $D\hat{B}C$? Perché? Utilizza le proprietà *b* e *c* viste prima e questa: in un triangolo isoscele i due angoli alla base sono congruenti.

? Ora risolvi il problema iniziale

ALLA SCOPERTA DEL LIBRO

Trovi problemi sulle rette parallele nella *Matematica per il cittadino* del capitolo G3, che sono nell'e-book e online.

Nel sito: ▶ Esercitazione guidata su *Motori di ricerca* ▶ Esercitazione guidata su *Presentazioni multimediali*

In cinque slide

Il teorema di Pitagora

Con una presentazione multimediale, spiega che cosa dice il teorema di Pitagora e illustra diversi modi per dimostrarlo.

Cerca nel web: teorema, Pitagora, dimostrazione.

Copyright © 2012 Zanichelli editore S.p.A., Bologna
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

Ricercare

Sono di più i numeri naturali o i numeri interi?

Prima di rispondere

UN NUMERO FINITO DI ELEMENTI

Per confrontare la numerosità di due insiemi A e B con un numero finito di elementi, basta contarli.

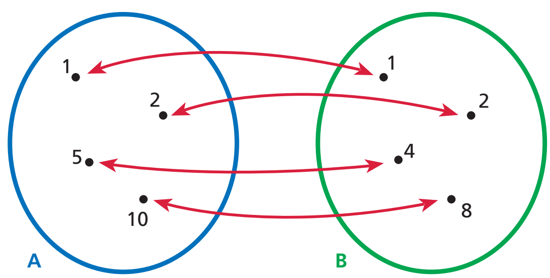
▶ **Verifichiamo che l'insieme *A* dei divisori di 10 ha lo stesso numero di elementi dell'insieme *B* dei divisori di 8.**

Elenchiamo gli elementi degli insiemi:

$$A = \{1, 2, 5, 10\}, \quad B = \{1, 2, 4, 8\}.$$

A e B hanno entrambi 4 elementi; si dice anche che hanno la stessa *cardinalità*.

Possiamo arrivare alla stessa conclusione costruendo una corrispondenza come quella della figura.



Poiché a ogni elemento di A corrisponde uno e un solo elemento di B e, viceversa, a ogni elemento di B corrisponde uno e un solo elemento di A, i due insiemi hanno la stessa cardinalità, ossia hanno lo stesso numero di elementi.

INFINITI ELEMENTI

Che cosa succede se gli insiemi hanno infiniti elementi?
Per esempio, consideriamo C insieme dei numeri naturali e D insieme dei numeri naturali maggiori di 0. Poiché D si ottiene da C privandolo dello 0, si direbbe che il numero di elementi di D è minore di quello degli elementi di C. Ragioniamoci sopra.
In questo caso non possiamo contare gli elementi di C e di D: non finiremmo mai! Allora cerchiamo di creare una corrispondenza fra gli elementi dei due insiemi, come quella dell'esempio precedente.
Associamo al numero 0 dell'insieme C il numero 1 dell'insieme D, al numero 1 di C il numero 2 di D e così via: al numero n appartenente a C associamo il numero $n + 1$ appartenente a D.
Poiché a ogni elemento di C corrisponde uno e un solo elemento di D e, viceversa, a ogni elemento di D corrisponde uno e un solo elemento di C, i due insiemi hanno la stessa cardinalità, ossia lo stesso numero di elementi.

UP TO YOU

Sono di più i numeri naturali o i numeri pari?

? Ora rispondi alla domanda iniziale

Nel sito: ▶ Esercitazione guidata su *Motori di ricerca* ▶ Esercitazione guidata su *Elaborazione di testi*

In dieci righe

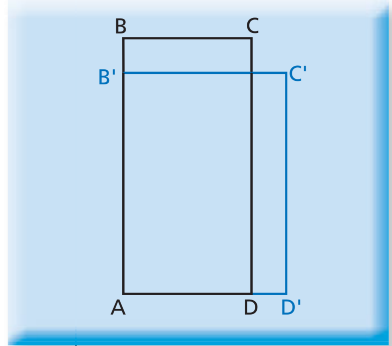
Una ricerca infinita

In matematica ci sono concetti oggetto di incessante indagine e ricerca. Il matematico tedesco David Hilbert affermò che nessun altro concetto ha mai scosso così profondamente lo spirito umano come quello di infinito. Scrivi una relazione con il computer descrivendo il paradosso dell'infinito in cui si imbatté Galileo e i risultati ottenuti in seguito. Descrivi poi almeno un paradosso dell'infinito riguardante la geometria. Per esempio, i punti di una semiretta sono di più di quelli di un suo segmento?

Cerca nel web: paradosso, quadrati, paradosso Grand Hotel.

Copyright © 2012 Zanichelli editore S.p.A., Bologna
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

Il rettangolo *ABCD* ha base lunga 2 cm e altezza 2 cm. Ai lati *AB* e *CD* togliamo e ai lati *AD* e *BC* aggiungiamo segmenti congruenti, in modo da ottenere il rettangolo *AB′C′D′*. Quale deve essere la lunghezza di questi segmenti per fare in modo che il nuovo rettangolo abbia area massima?



Prima di rispondere

UN PROBLEMA DI MASSIMO

Fin dai tempi dei Greci, i concetti di massimo e minimo costituiscono un importante strumento di ricerca del pensiero scientifico, tanto da far dire al matematico Eulero (1774): «nel mondo non avviene nulla senza che si osservi una regola di minimo o di massimo».

▶ **Dimostriamo che fra tutti i rettangoli di perimetro 40 cm, quello che ha area massima è il quadrato di lato 10 cm.**

L'area del quadrato è 100 cm^2. Notiamo poi che ogni rettangolo di perimetro 40 cm si può ottenere dal quadrato, togliendo un segmento da due lati paralleli del quadrato e aggiungendo un segmento di uguale misura agli altri due lati. Se chiamiamo x questa misura, una dimensione del rettangolo è $10 - x$, l'altra è $10 + x$, quindi la misura A dell'area del rettangolo è:

$$A = (10 - x) \cdot (10 + x).$$

Applichiamo la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione:

$$A = (10 - x) \cdot (10 + x) = (10 - x) \cdot 10 + (10 - x) \cdot x =$$
$$= 10 \cdot 10 - 10 \cdot x + 10 \cdot x - x \cdot x = 10^2 - x^2 = 100 - x^2.$$

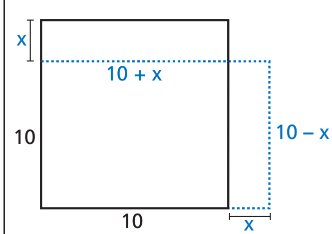
L'area del rettangolo è quindi sempre minore di quella del quadrato.

Possiamo anche vedere questa proprietà mediante un grafico cartesiano della funzione $A = 100 - x^2$, dove i valori relativi ai rettangoli sono soltanto quelli con $x \geq 0$. Notiamo che il valore massimo di A è in corrispondenza di $x = 0$, ossia quando consideriamo il quadrato.

x	A
0	100
±3	91
±5	75
±7	51
±9	19
±10	0

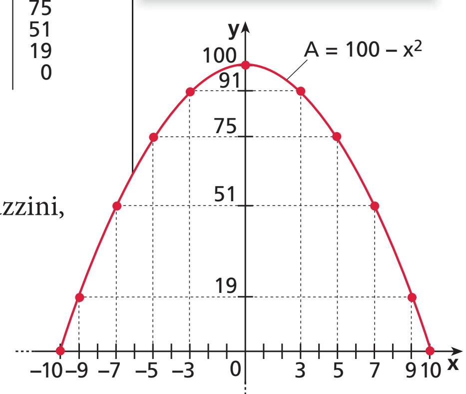
ALLA SCOPERTA DEL LIBRO

Esercizi di scrittura di aree e perimetri con espressioni algebriche sono nel *paragrafo* «Le operazioni con i polinomi». Cercalo.



ALLA SCOPERTA DEL LIBRO

La rappresentazione di una funzione mediante una tabella e un grafico è trattata nel *paragrafo* «Le funzioni numeriche».



UP TO YOU

In un paese, piazza Garibaldi ha lo stesso perimetro di piazza Mazzini, ma area maggiore. Che cosa possiamo dire dei loro lati?

? Ora rispondi alla domanda iniziale

Nel sito: ▶ Scheda di lavoro

Per approfondire **Un perimetro infinito**

È possibile racchiudere una regione finita di piano con una linea di lunghezza infinita?

Copyright © 2012 Zanichelli editore S.p.A., Bologna
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

Imparare a imparare

Imparare a imparare è una delle competenze chiave che l'Unione Europea ha individuato per i cittadini della società della conoscenza.
Implica:
- saper cercare e controllare le informazioni;
- individuare collegamenti e relazioni;
- progettare la propria attività;
- comunicare e collaborare con gli altri;
- risolvere problemi della vita reale.

Alcuni matematici sono uccelli, altri sono rane.
Gli uccelli volano alto nell'aria e scrutano le vaste distese della matematica, spingendo lo sguardo fino all'orizzonte. Prediligono i concetti che unificano i nostri modi di pensare e partendo da punti diversi del paesaggio riuniscono una molteplicità di problemi.
Invece le rane vivono nel fango e vedono solo i fiori che crescono nei pressi. Preferiscono osservare i singoli oggetti nei loro minuti particolari e risolvono i problemi uno alla volta.

Freeman Dyson, *Uccelli e rane*: *la matematica come metafora*,
in *Il club dei matematici solitari del Prof. Odifreddi*, Mondadori, 2009.

Essere rana

Nello studio della matematica sarai soprattutto una rana: affronterai i problemi uno alla volta e cercherai di capire i *particolari*.

Ma non dimenticare di «vedere i fiori».

La matematica è nella realtà Può essere difficile vederla, ma ci circonda e serve nella vita di tutti i giorni. Scoprilo nei problemi di *Matematica per il cittadino*.

La matematica è cultura È una delle discipline che più si prestano al collegamento con le altre ed è necessaria per affrontare i problemi del sapere in campi anche molto diversi fra loro. Puoi vederlo nelle *Esplorazioni* e nelle prime pagine di ogni capitolo.

La matematica è palestra Una palestra per la mente. La comprensione di ogni nuovo concetto e l'esercizio giornaliero allenano ad affrontare i problemi in modo razionale.

Ma non accontentarti degli esercizi di allenamento: nei *Mettiti alla prova*, gioca le tue partite!

La matematica ha un linguaggio specifico al quale devi fare attenzione nelle definizioni e nelle parole che mettiamo in evidenza. Nei *Test your skills* hai un'occasione per imparare il lessico matematico in inglese.

Essere falco

Nello studio è importante anche avere una *visione d'insieme*. Per darti una mano a essere falco, ti proponiamo di inquadrare quello che farai mediante quattro competenze fondamentali, indicando dove le incontrerai prevalentemente.

Copyright © 2012 Zanichelli editore S.p.A., Bologna
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi