

# LABORATORIO DI MATEMATICA

## EQUAZIONI E DISEQUAZIONI

### Le equazioni irrazionali

#### ESERCITAZIONE GUIDATA

Con l'aiuto di Derive discutiamo il numero delle soluzioni reali che può avere la seguente equazione irrazionale

$$\sqrt{x+h} = 2x+2$$

al variare del parametro reale  $h$ .

#### Le soluzioni dell'equazione in funzione di $h$

- Entriamo in ambiente Derive, diamo *Crea\_Espressione* e digitiamo nella riga di editazione delle espressioni l'equazione  $\text{SQRT}(x+h) = 2 \cdot x + 2$ . Con  $\text{OK}$  la inseriamo nell'etichetta #1 della zona algebrica (figura1).
- Derive non risolve l'equazione irrazionale non conoscendo i valori del parametro  $h$ . Battiamo, allora, il tasto  $\text{F4}$  importando l'equazione dalla zona algebrica alla riga di editazione delle espressioni fra parentesi. A fianco scriviamo  $\wedge 2$ , per elevare al quadrato entrambi i membri dell'equazione ed eliminare la radice.
- Con  $\text{OK}$  la inseriamo nella #2.
- Usiamo *Risolvi\_Espressione*, nella cui finestra di dialogo confermiamo l'equazione e usciamo con *Semplifica*, ottenendo nella #3 l'impostazione e nella #4 le soluzioni dell'equazione in funzione di  $h$ . Adesso verifichiamo se quelle trovate sono soluzioni accettabili dell'equazione originale.

#1:  $\sqrt{(x+h)} = 2 \cdot x + 2$

#2:  $(\sqrt{(x+h)} = 2 \cdot x + 2)^2$

#3:  $\text{SOLVE}((\sqrt{(x+h)} = 2 \cdot x + 2)^2, x)$

#4:  $x = \frac{\sqrt{(16 \cdot h - 15)} - 7}{8} \vee x = -\frac{\sqrt{(16 \cdot h - 15)} + 7}{8}$

◀ Figura 1

#### Le condizioni di esistenza delle soluzioni

Imponiamo le condizioni affinché l'equazione sia soddisfatta. Nel nostro caso sono: la condizione di esistenza del radicale, ovvero poniamo il radicando maggiore o uguale a 0, e la condizione che il secondo membro dell'equazione sia maggiore o uguale a 0.

- Dopo averlo evidenziato con dei clic successivi sull'equazione contenuta nella #1, importiamo nella riga di editazione il radicando  $x+h$ , a fianco battiamo  $\geq 0$ , imponendo la condizione di esistenza del radicale, e lo inseriamo nella #5 (figura 2).
- Con *Risolvi\_Espressione* ricaviamo nella #6 l'impostazione e nella #7 la soluzione della disequazione.
- Analogamente, operiamo per stabilire quando il secondo membro dell'equazione è positivo, come vediamo nella #8, nella #9 e nella #10.

#5:  $x + h \geq 0$

#6:  $\text{SOLVE}(x + h \geq 0, x)$

#7:  $x \geq -h$

#8:  $2 \cdot x + 2 \geq 0$

#9:  $\text{SOLVE}(2 \cdot x + 2 \geq 0, x)$

#10:  $x \geq -1$

◀ Figura 2

## Esercitazioni

### Le equazioni irrazionali con parametro

Con l'aiuto del computer discuti il numero delle soluzioni reali che possono avere le seguenti equazioni irrazionali al variare del parametro reale  $k$ .

- 1**  $\sqrt{x-1} = h - x$  [ $h \geq 1$ : una sol.;  $h < 1$ : nessuna sol.]
- 2**  $\sqrt{hx - x^2} = x$  [ $h < 0$ : una sol.;  $h = 0$ : una sol. doppia;  $h > 0$ : due sol.]
- 3**  $\sqrt{1+x^2} = -\frac{4x+h}{5}$  [ $h < -3$ : due sol.;  $h = -3$ : una sol. doppia;  $h > -3$ : nessuna sol.]
- 4**  $\sqrt{1-3x} = x - h$  [ $h \leq \frac{1}{3}$ : una sol.;  $h > \frac{1}{3}$ : nessuna sol.]
- 5**  $\sqrt{hx+4} = x - 1$  [ $h \geq 4$ : una sol.;  $h < 4$ : nessuna sol.]

## Le disequazioni

### Il simbolo di assegnazione

In ambiente Derive, con il simbolo di assegnazione  $:=$  (due punti uguale) possiamo dare un nome a un'espressione.

#### ESERCITAZIONE GUIDATA

Cerchiamo gli zeri del polinomio  $3k^3 - 12k$ .

- Con *Crea\_Espressione* scriviamo  $p := 3 \cdot k^3 - 12 \cdot k$  e battiamo INVIO. In tal modo diamo il nome  $p$  al polinomio  $3k^3 - 12k$  (figura 1).
- Scriviamo la funzione SOLVE ( $p = 0, k$ ) e con INVIO la immettiamo nella #2.
- Diamo *Semplifica\_Base* trovando nella #3 gli zeri del polinomio.

```
#1:  p := 3·k3 - 12·k
#2:  SOLVE(p = 0, k)
#3:  k = -2 ∨ k = 2 ∨ k = 0
```

▲ Figura 1 Un esempio di assegnazione.

L'assegnazione di un nome a un'espressione rimane attiva all'interno del file nel quale l'abbiamo realizzata, anche se cancelliamo l'etichetta che la contiene. Se desideriamo togliere un'assegnazione, per esempio quella al nome  $p$ , scriviamo l'espressione  $p :=$  e la inseriamo nella zona algebrica. Il solo simbolo di uguale ( $=$ ) non vincola in alcun modo le grandezze coinvolte.

#### ESERCITAZIONE GUIDATA

Con l'aiuto di Derive discutiamo il tipo delle soluzioni della disequazione

$$(3h + 3)x^2 - 3hx - 8h - 3 \geq 0,$$

in relazione ai valori del parametro reale  $h$ . Per verifica sostituiamo poi a  $h$  un valore appartenente a ognuno degli intervalli risultati dalla discussione e risolviamo le corrispondenti disequazioni.

#### L'analisi del problema

Redigiamo uno schema che indichi le diverse tipologie delle soluzioni della disequazione  $ax^2 + bx + c \geq 0$ , in relazione ai valori che assumono il coefficiente  $a$  di  $x^2$  e il discriminante  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

Se	la disequazione $ax^2 + hx + c \geq 0$ ammette soluzioni che sono
$a > 0$ e $\Delta > 0$ ,	esterne all'intervallo delle radici, estremi compresi;
$a > 0$ e $\Delta \leq 0$ ,	date da $\mathbb{R}$ ;
$a = 0$ ,	quelle di una disequazione di primo grado;
$a < 0$ e $\Delta > 0$ ,	interne all'intervallo delle radici, estremi compresi;
$a < 0$ e $\Delta = 0$ ,	date da un solo valore di $x$ ;
$a < 0$ e $\Delta < 0$ ,	date da $\emptyset$ (l'insieme vuoto).

### I dati della disequazione

- Diamo *Crea\_Espressione* per scrivere la disequazione e battiamo INVIO per immetterla nell'etichetta #1 della zona algebrica (figura 2).
- Per assegnare il nome  $a$  all'espressione  $3h + 3$ , che rappresenta il coefficiente di  $x^2$ , sulla riga di editazione scriviamo  $a :=$  e importiamo dalla zona algebrica alla riga di editazione l'espressione  $3h + 3$ . Per farlo, di seguito facciamo clic sull'etichetta #1, sul primo membro della disequazione, sul suo primo termine, sul coefficiente di  $x^2$ , sulla riga di editazione e battiamo il tasto F3.
- Costruita l'assegnazione  $a := 3h + 3$ , con INVIO la immettiamo nella #2.
- Assegniamo il nome DELTA all'espressione che rappresenta il discriminante della disequazione in funzione di  $h$ , scrivendo nella riga di editazione  

$$\text{DELTA} := (-3h)^2 - 4(3h + 3)(-8h - 3)$$
e battendo INVIO.
- Posizionando opportunamente il puntatore e dando *Inserisci\_Testo*, scriviamo alcune didascalie.

```

La disequazione
#1: (3·h + 3)·x2 - 3·h·x - 8·h - 3 ≥ 0
Il coefficiente a
#2: a := 3·h + 3
Il discriminante
#3: DELTA:=(-3·h)2 -4·(3·h+3)·(-8·h-3)
    
```

▲ Figura 2 La disequazione, il coefficiente di  $x^2$  e il discriminante.

### Le soluzioni dei vari casi

- Per impostare la soluzione del primo caso dello schema, scriviamo nella riga di editazione SOLVE([ $a > 0$ , DELTA > 0],  $h$ ) e battiamo INVIO (figura 3).
- Diamo *Semplifica\_Base*, Derive risolve il sistema di disequazioni e mostra la soluzione nella #5.
- Operiamo similmente per ricavare le soluzioni degli altri casi.
- Osserviamo, leggendo la #13 e la #15, che i casi, corrispondenti al coefficiente  $a$  negativo assieme al discriminante nullo o negativo, non si verificano per alcun valore di  $h$ .

```

La soluzione dei vari casi
#4: SOLVE([a > 0, DELTA > 0], h)
#5: [-1 < h < -6/7, h > -2/5]
#6: SOLVE([a > 0, DELTA ≤ 0], h)
#7: [-6/7 ≤ h ≤ -2/5]
#8: SOLVE(a = 0, h)
#9: h = -1
#10: SOLVE([a < 0, DELTA > 0], h)
#11: [h < -1]
#12: SOLVE([a < 0, DELTA = 0], h)
#13: []
#14: SOLVE([a < 0, DELTA < 0], h)
#15: []
    
```

▲ Figura 3 Le soluzioni dei vari casi.

### Alcune verifiche

- Per svolgere rapidamente alcune verifiche, usiamo la funzione di Derive VECTOR. In essa inseriamo l'impostazione della soluzione della disequazione, il parametro  $h$  e i valori che intendiamo che esso assuma. Scegliamo tali valori in modo che ognuno appartenga a un diverso intervallo fra quelli ottenuti nella discussione, prendiamo per esempio  $-2, -1, -\frac{9}{10}, -\frac{1}{2}, 0$ . Se i valori della variabile che desideriamo sostituire nell'espressione non variano con regolarità, dobbiamo scrivere la funzione con la sintassi VECTOR(*espr*, *var*,  $v$ ), dove  $v$  è l'insieme dei valori, posti fra parentesi quadre, che la variabile *var* deve assumere all'interno dell'espressione *espr*.

• Diamo, quindi, *Crea\_Espressione*, digitiamo l'espressione

VECTOR([SOLVE(3\*(h + 1)\*x^2 - 3\*h\*x - 8\*h - 3 ≥ 0, x)], h, [- 2, - 1, - 9/10, - 1/2, 0])

e battiamo INVIO inserendola nell'etichetta #16 (figura 4).

• Con *Semplifica\_Base* la facciamo operare, ricavando nella #17 le corrispondenti soluzioni della disequazione.

```

Alcune verifiche
#16: VECTOR([SOLVE(3*(h+1)*x^2-3*h*x-8*h-3>=0,x)],h,[-2,-1,-9/10,-1/2,0])
#17: [
1 - 4*sqrt(3)/3 <= x <= 4*sqrt(3)/3 + 1
x >= -5/3
x <= -7 v x >= -2
true
x <= -1 v x >= 1
    ]
    
```

◀ Figura 4 Alcune verifiche.

**Osservazione**

Notiamo che per  $h = -2$  le soluzioni sono interne all'intervallo delle radici, per  $h = -1$  otteniamo le soluzioni della disequazione lineare, per  $h = -\frac{9}{10}$  e per  $h = 0$  le soluzioni sono esterne all'intervallo delle radici, per  $h = -\frac{1}{2}$  la risposta *true* (vero) indica che la disequazione è sempre vera, cioè le soluzioni sono date da  $\mathbb{R}$ .

**Esercitazioni**

Con l'aiuto del computer discuti il tipo delle soluzioni delle seguenti disequazioni, in relazione ai valori reali del parametro  $h$ , e svolgi delle verifiche.

**1**  $\frac{3(2x - h)}{h + 1} < \frac{x}{h^2 - 1}$

**2**  $2(h^3 - h)x^2 + 2(h - 1)x + 3 < 0$

**3**  $\frac{h - 1}{h + 3}x^2 - 2x + 2 \geq 0$

**4**  $\frac{hx - h - 1}{x^2 - 2x - 3} > 0$

**Le disequazioni lineari**

Risolvi le seguenti disequazioni lineari con l'aiuto del computer, svolgendo i vari passi, e infine controlla il risultato (se usi Derive, puoi farlo con il comando *Risolvi\_Espressione*).

**5**  $10x + 8 < 7x - 24$   $\left[ x < -\frac{32}{3} \right]$

**6**  $25x - 32 \geq 40x - 62$   $[x \leq 2]$

**7**  $\frac{4}{5}x - \frac{2}{3} > \frac{2}{3}x - \frac{6}{25}$   $\left[ x > \frac{16}{5} \right]$

<b>8</b>	$\frac{5}{4}x - 2 > 2x - \frac{2}{5}$	$\left[ x < -\frac{32}{15} \right]$
<b>9</b>	$\frac{7}{5}x + \frac{25}{9} < \frac{1}{2}x - \frac{7}{15} + \frac{19}{10}x$	$\left[ x > \frac{146}{45} \right]$
<b>10</b>	$\frac{28}{27}x - \frac{7}{12} \leq \frac{5}{24}x - \frac{35}{72}$	$\left[ x \leq \frac{21}{179} \right]$
<b>11</b>	$\frac{4}{405}x - \frac{7}{234} > \frac{2}{543}x - \frac{1}{825}$	$\left[ x > \frac{3008763}{649220} \right]$
<b>12</b>	$\frac{354}{4}x - \frac{2048}{9} > \frac{2500}{3}x - \frac{653}{6}$	$\left[ x < -\frac{2137}{13407} \right]$

### Le disequazioni irrazionali

Risolvi con l'aiuto del computer le seguenti disequazioni irrazionali.

<b>13</b>	$\sqrt{x^2 - 3x + 2} < 2x + 5$	$\left[ \frac{\sqrt{253}}{6} - \frac{23}{6} < x \leq 1 \vee x \geq 2 \right]$
<b>14</b>	$\sqrt{-x^2 + 9} < \frac{11 - 2x}{4}$	$\left[ -3 \leq x < \frac{11}{10} - \frac{\sqrt{59}}{5} \vee \frac{\sqrt{59}}{5} + \frac{11}{10} < x \leq 3 \right]$
<b>15</b>	$\sqrt{x + 4} < \frac{1}{5}(x - 5) + 3$	$[-4 \leq x < 0 \vee x > 5]$
<b>16</b>	$\sqrt{8x^2 - 16x - 48} > x + 5$	$\left[ x < \frac{13}{7} - \frac{2\sqrt{170}}{7} \vee x > \frac{13}{7} + \frac{2\sqrt{170}}{7} \right]$
<b>17</b>	$\sqrt{x^2 + 9} < \frac{x + 6}{2}$	$[0 < x < 4]$
<b>18</b>	$\sqrt{x^2 - 3} > 2x - 2$	$[x \leq -\sqrt{3}]$
<b>19</b>	$\sqrt{x^2 + 6x} > 4$	$[x < -8 \vee x > 2]$
<b>20</b>	$\sqrt{5x^2 + 125} < \frac{1}{2}x - 2$	$[\nexists x \in \mathbb{R}]$
<b>21</b>	$\sqrt{-x^2 + 4} > 2x + 2$	$[-2 \leq x < 0]$
<b>22</b>	$2\sqrt{x^2 - 5x + 4} < 2x - 3$	$[x \geq 4]$
<b>23</b>	$2\sqrt{3 - 2x - x^2} > x + 3$	$\left[ -3 < x < \frac{1}{5} \right]$
<b>24</b>	$2\sqrt{4 + 2x + x^2} > \frac{2}{5}x - 3$	$[\forall x \in \mathbb{R}]$
<b>25</b>	$\sqrt{4 + x^2} < -\frac{3x + 5}{4}$	$[\nexists x \in \mathbb{R}]$