

LABORATORIO DI MATEMATICA

LE FUNZIONI

Le funzioni

ESERCITAZIONE GUIDATA

Data la funzione $f(x) = \sqrt{ax + b}$, con $a \neq 0$, con Excel costruiamo un foglio elettronico che:

- legga i valori dei coefficienti a e b ;
- stabilisca il dominio della funzione corrispondente;
- determini le eventuali intersezioni con gli assi cartesiani del grafico della funzione;
- tracci il grafico della funzione.

Per ricavare il grafico il foglio deve:

- leggere gli estremi x_1 e x_2 di un intervallo I ;
- controllare che I appartenga al dominio della funzione;
- caricare una tabella con i valori di x variabili in I con i corrispondenti valori della funzione.

Proviamo il foglio ponendo $a = -1$ e $b = 2$ e scegliendo per il grafico di f l'intervallo $[-3; 2]$.

L'analisi del problema

Osserviamo che la funzione $f(x) = \sqrt{ax + b} - 2$, con $a \neq 0$, è una funzione irrazionale.

Il dominio della funzione è dato dai valori di x per cui si ha $ax + b \geq 0$, ossia:

$$D: \text{ se } a > 0, x \geq -\frac{b}{a}; \quad \text{ se } a < 0, x \leq -\frac{b}{a}.$$

Se $b \geq 0$, l'intersezione con l'asse y è in $(0; \sqrt{b} - 2)$, altrimenti non esiste.

Risolvendo l'equazione irrazionale $\sqrt{ax + b} - 2 = 0$, otteniamo $x = \frac{4 - b}{a}$. Facciamo la verifica

$\sqrt{a \frac{4 - b}{a} + b} - 2 = 0$, che, essendo soddisfatta, ci permette di dire che l'intersezione con l'asse x esiste sempre e le sue coordinate sono date da $(\frac{4 - b}{a}; 0)$.

La costruzione del foglio

- Scriviamo i testi e mettiamo dei bordi alle celle B4 e B6, per indicare dove immettere i valori dei coefficienti a e b , come vediamo in figura 1.
- Scriviamo i titoli per leggere i risultati, unendo due celle con il bottone *Unisci e Centra*, come vediamo in figura 1.
- Controlliamo il coefficiente a , digitando in B5 la formula $=SE(B4 = 0; "Il dato non è accettabile"; "")$, che segnala il valore 0 per a o lascia la cella vuota.
- Per mostrare il dominio, digitiamo $=SE(B4 > 0; "x \geq "; "x \leq ")$ in A9 e $= -B6/B4$ in B9.
- Per ricavare l'intersezione del grafico con l'asse x , digitiamo per l'ascissa $= (4 - B6)/B4$ in A12 e per l'ordinata 0 in B12.
- Determiniamo l'eventuale intersezione con l'asse y digitando per l'ascissa $= SE(B6 < 0; "non esiste"; 0)$ in A15 e per l'ordinata $= SE(B6 < 0; "", RADQ(B6) - 2)$ in B15.
- Facciamo operare il foglio digitando i dati consigliati per a e per b , -1 in B4 e 2 in B6 (figura 1).

	A	B
1	f(x) = RADQ(a*x + b) - 2	
2		
3	I valori dei coefficienti	
4	a =	-1,0000
5		
6	b =	2,0000
7		
8	Il dominio	
9	x ≤	2,0000
10		
11	L'intersezione con l'asse x	
12	-2,0000	0,0000
13		
14	L'intersezione con l'asse y	
15	0,0000	-0,5858

► Figura 1 Il foglio con i risultati del caso proposto dal problema.

La tabella per il grafico

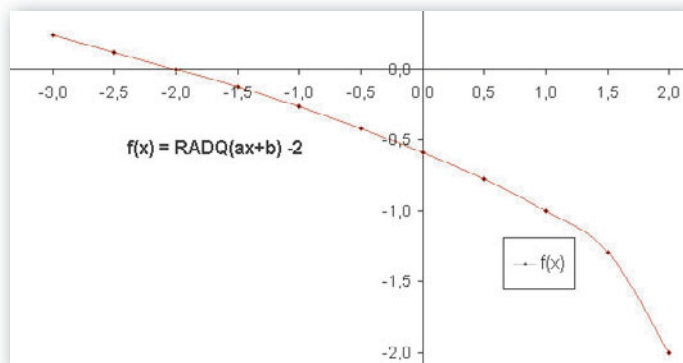
- Inseriamo nel foglio i titoli e le intestazioni della tabella necessaria per ricavare il grafico della funzione e mettiamo dei bordi alle celle F2 e F3, per indicare dove inserire gli estremi dell'intervallo di variazione della x , come vediamo in figura 2.
- Controlliamo l'appartenenza dell'intervallo scelto al dominio della funzione e, in caso affermativo, calcoliamo l'incremento della x digitando in F6 la formula = SE(F3 <= F2; "L'estremo inferiore di I non è minore dell'estremo superiore"; SE(O(E(B4 > 0; F2 < B9); E(B4 < 0; F3 > B9)); "I non appartiene al dominio della funzione"; (F3 - F2)/10)).
- Per ottenere i valori di x digitiamo = F2 in E10, = E10 + \$F\$6 in E11 e la copiamo fino alla E20.
- Ricaviamo i valori della funzione, scrivendo la formula = RADQ(\$B\$4*E10 + \$B\$6) - 2 in F10 e copiandola fino alla F20.
- Immettiamo - 3 in F2 e 2 in F3 ricavando la tabella con le coordinate dei punti del grafico di $f(x)$ (figura 2).

	E	F
1	Gli estremi dell'intervallo I	
2	x1 =	-3,0000
3	x2 =	2,0000
4		
5	L'incremento della x	
6	deltax =	0,5000
7		
8	La tabella per il grafico	
9	x	f(x)
10	-3,0000	0,2361
11	-2,5000	0,1213
12	-2,0000	0,0000
13	-1,5000	-0,1292
14	-1,0000	-0,2679
15	-0,5000	-0,4189
16	0,0000	-0,5858
17	0,5000	-0,7753
18	1,0000	-1,0000
19	1,5000	-1,2929
20	2,0000	-2,0000

▲ Figura 2 La tabella per il grafico della funzione.

Il grafico

- Per realizzare il grafico evidenziamo la zona E9:F20 e diamo il comando *Inserisci_Grafico*. Nella prima finestra di dialogo scegliamo il tipo *Dispers(XY)* e il sottotipo *Dispersione con coordinate unite da linee smussate*. Nella seconda confermiamo le proposte di Excel. Nella terza assegniamo un titolo al grafico $f(x) = \text{RADQ}(a*x + b) - 2$ e togliamo la griglia. Nella quarta scegliamo di creare un nuovo foglio grafico.
- Dopo che Excel ha realizzato il grafico, togliamo il colore allo sfondo, sostituiamo il colore della linea e degli indicatori dei punti con il colore rosso e spostiamo con il mouse la legenda dentro al grafico. Al termine delle variazioni vediamo il grafico di figura 3.



► Figura 3 Il grafico della funzione nell'intervallo [- 3; 2].

Esercitazioni

Per ognuna delle seguenti funzioni determina, con l'aiuto del computer, i coefficienti a e b in modo che i punti C e D appartengano al grafico della funzione. Rappresenta tale grafico.

1 $f(x) = \frac{2}{ax + b}$, $C(-2; -2)$ e $D(1; 1)$. [1, 1]

2 $f(x) = a - \sqrt{x + b}$, $C(0; 1)$ e $D(8; -1)$ [2, 1]

Per ognuna delle seguenti coppie di funzioni f e g costruisci con il computer due tabelle con tre colonne ciascuna. Prima tabella: alcuni valori della x , i corrispondenti valori della f e della $g \circ f$; seconda tabella: alcuni valori della x , i corrispondenti valori della g e della $f \circ g$. Traccia inoltre, in un riferimento cartesiano, i grafici di f e di $g \circ f$ e, in un altro, quelli di g e di $f \circ g$.

Funzioni definite da \mathbb{N} a \mathbb{N} .

3 $f: n \mapsto n^2, \quad g: n \mapsto n + 3.$

4 $f: n \mapsto n^3, \quad g: n \mapsto n^2 + 1.$

Funzioni definite da \mathbb{Z} a \mathbb{Z} .

5 $f: x \mapsto x - 1, \quad g: x \mapsto x^2 - 4.$

6 $f: x \mapsto x^3 - 8, \quad g: x \mapsto |2x - 2|.$

Funzioni definite da \mathbb{R} a \mathbb{R} .

7 $f: x \mapsto \frac{1}{4}x - 4, \quad g: x \mapsto \frac{2}{x - 1}.$

9 $f: x \mapsto \frac{x - 2}{4}, \quad g: x \mapsto \frac{x^2}{x^2 - 1}.$

8 $f: x \mapsto \sqrt{x^2 - 5x}, \quad g: x \mapsto 2x - 1.$

10 $f: x \mapsto x^3, \quad g: x \mapsto \frac{2}{5x - 4}.$

Funzioni definite da \mathbb{N} a \mathbb{R} . Esamina solo la funzione composta $g \circ f$.

11 $f: n \mapsto n^2 + 1, \quad g: n \mapsto \frac{n}{n + 1}.$

12 $f: n \mapsto n^3 + 1, \quad g: n \mapsto \frac{1}{n + 4}.$

Per ognuna delle seguenti funzioni f realizza con il computer i grafici della f e della funzione inversa. Se necessario, opera degli opportuni restringimenti dell'insieme di partenza della f . Evidenzia la simmetria dei due grafici rispetto alla bisettrice del primo quadrante.

13 $f: x \mapsto 2x + 2$

16 $f: x \mapsto \frac{1}{x - 2}, \text{ con } x \neq 2.$

14 $f: x \mapsto x^2, \text{ con } x \geq 0.$

17 $f: x \mapsto x^3$

15 $f: x \mapsto \frac{1}{x^2}, \text{ con } x > 0.$

18 $f: x \mapsto \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, \text{ con } x \neq 0.$

Le funzioni e le trasformazioni geometriche

ESERCITAZIONE GUIDATA

Con Derive, per osservare la dilatazione verticale, consideriamo la funzione

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x$$

e rappresentiamo i grafici di $f(x)$ e della funzione dilatata $2 \cdot f(x)$, secondo il fattore 2.

Per osservare la contrazione verticale, operiamo in modo analogo con la $f(x)$ e con la sua contratta

$$\frac{1}{2} \cdot f(x), \text{ secondo il fattore } \frac{1}{2}.$$



La funzione e le due trasformate

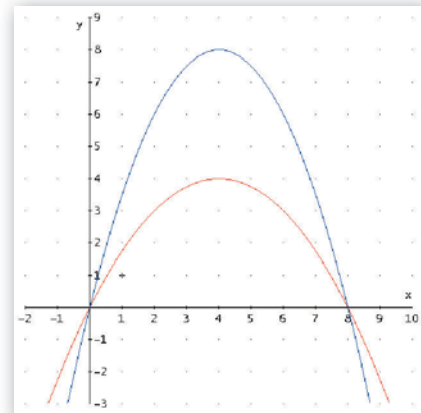
- Entriamo in ambiente Derive, diamo *Crea_Espressione*, digitiamo nella riga di editazione delle espressioni la funzione $-1/4 * x^2 + 2*x$ e con OK la inseriamo nell'etichetta #1 (figura 1).
- Battiamo F4 importando l'espressione dalla zona algebrica alla riga di editazione delle espressioni fra parentesi, a fianco scriviamo * 2 e facciamo clic sul secondo bottone a sinistra della riga di editazione delle espressioni (quello con un uguale) inserendola nella #2 semplificata.
- Operiamo in modo analogo per ottenere nella #3 la funzione divisa per 2 e semplificata.

#1:	$-\frac{1}{4}x^2 + 2x$
#2:	$\frac{x \cdot (8 - x)}{2}$
#3:	$\frac{x \cdot (8 - x)}{8}$

▲ Figura 1 Le funzioni.

La prima rappresentazione grafica

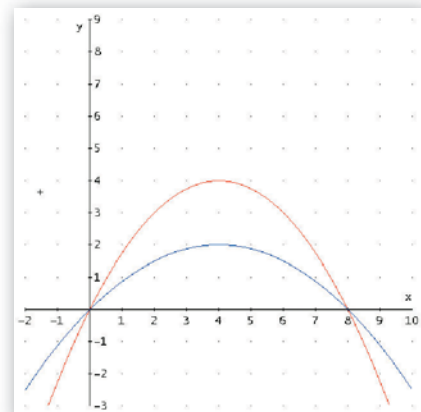
- Evidenziamo la #1, entriamo in ambiente grafico, facciamo clic sul bottone *Finestra_Grafica 2D*.
- Per tracciare in rosso il grafico di $f(x)$, usiamo *Opzioni_Visualizzazione*, selezioniamo il segnalibro *Colore* e nella tavolozza *Colore successivo* facciamo clic sul colore rosso. Diamo quindi *Traccia il grafico*.
- Torniamo in algebra con il relativo bottone, evidenziamo la #2, passiamo in grafica, dove scegliamo il colore blu e diamo *Traccia il grafico*.
- Inquadriamo le due curve con *Imposta_Intervallo del Grafico*, selezioniamo *Massimo/minimo*, nella cui finestra di dialogo scegliamo -2 (il minimo), 8 (il massimo) e 10 (il numero delle tacche) per l'asse orizzontale e $-3, 9$ e 12 per l'asse verticale.
- Di solito il riferimento cartesiano che appare sullo schermo è *dimetrico*, ossia con due unità di misura diverse per i due assi. Per rendere il sistema *monometrico*, diamo *Imposta_Rapporto di aspetto* e, nella finestra di dialogo, facciamo clic su *Resetta*. Osserviamo in figura 2 l'andamento del grafico di $f(x)$ in rosso e quello della sua dilatata in blu.



▲ Figura 2 La dilatazione.

La seconda rappresentazione grafica

- Operiamo analogamente in un altro grafico per ottenere i grafici di $f(x)$ e di $\frac{1}{2} \cdot f(x)$.
- Osserviamo in figura 3 l'andamento del grafico di $f(x)$ in rosso e quello della sua contratta in blu.



▲ Figura 3 La contrazione.

Esercitazioni

Usa il computer per svolgere i seguenti esercizi.

Le traslazioni

- 1** Ricava l'equazione della funzione traslata di $f(x) = 2 + \ln x$ secondo un vettore parallelo all'asse y e lungo 2. Traccia il grafico della funzione e della sua traslata. Copia i grafici su un quaderno. Congiungi i punti del grafico di $f(x)$, di ascisse 1, e , e^2 , con i rispettivi punti corrispondenti del grafico della funzione traslata.
- 2** Ricava l'equazione della funzione traslata di $f(x) = -x^2 - 1$ secondo un vettore parallelo all'asse x e lungo 3. Traccia il grafico della funzione e della sua traslata. Centra i grafici, stampali, sul foglio stampato evidenzia con la matita i punti del grafico di $f(x)$ rispettivamente di ascissa $-1, 0, 1, 2$, e congiungili con i corrispondenti punti del grafico della funzione traslata.
- 3** Trasla la funzione $f(x) = x^2$ secondo un vettore $\vec{u}(1; -2)$, poi trasla la funzione ottenuta di un vettore $\vec{v}(3; 5)$. Scambia l'ordine dell'applicazione delle due traslazioni, traccia e centra i grafici delle funzioni e delle sue traslate. Alla fine osserva il risultato ottenuto.
- 4** Ricava l'equazione della funzione traslata di $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + 1}$ secondo il vettore $\vec{v}(-2; -1)$. Traccia i due grafici, centrali e stampali.

Le simmetrie

- 5** Inserisci la funzione
- $$f(x) = \sqrt{4x + 4},$$
- costruisci la simmetrica rispetto all'asse y e traccia i due grafici. Indica il dominio delle due funzioni. Copia i due grafici sul quaderno e congiungi con un righello e con una matita i punti del grafico della funzione $f(x)$, rispettivamente di ascissa $-\frac{3}{4}, 0, \frac{5}{4}$, con i punti corrispondenti nel grafico della funzione simmetrica.
- 6** Inserisci la funzione
- $$f(x) = \ln\left(-\frac{3}{2}x + 4\right),$$
- costruisci la sua simmetrica rispetto all'origine e traccia i due grafici. Indica il dominio delle due funzioni. Centra i grafici e stampali. Sul foglio stampato congiungi con un righello e con una matita i punti del grafico della funzione $f(x)$, rispettivamente di ascissa $-2, -1, 0, 1, 2$, con i punti simmetrici rispetto all'origine.
- 7** Per ognuna delle seguenti funzioni, esegui i seguenti passi: inserisci la funzione, determina le simmetrie rispettivamente rispetto all'asse x , all'asse y e all'origine. Traccia i quattro grafici, centrali nello schermo, stampali e sul foglio stampato congiungi almeno tre punti simmetrici.

$$r(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}}; \quad t(x) = \sqrt{-\frac{5}{2}x + \frac{7}{4}}; \quad s(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x + 1}.$$

Le dilatazioni e le contrazioni

- 8** Nel medesimo riferimento cartesiano, traccia i grafici della funzione $f(x) = \sqrt{2x + 4}$ e delle sue trasformate ottenute moltiplicando la funzione rispettivamente per 2, per 3 e per 4. Centra e stampa i grafici ottenuti. Che tipo di trasformazioni hai ottenuto?

- 9** Nel medesimo riferimento cartesiano, traccia i grafici della funzione $f(x) = \ln(x + 1)$ e della sua trasformatà, ottenuta moltiplicando rispettivamente la $f(x)$ per 10 e la x per 2. Copia sul quaderno i due grafici. Trova le intersezioni fra le due curve.
- 10** Data la funzione $f(x) = \cos x$, moltiplicala per k , assegna a k i valori 2, 3, 4 e traccia tutti i grafici. Stampali e osserva le dilatazioni verticali avvenute.