

LABORATORIO DI MATEMATICA

LA PARABOLA

ESERCITAZIONE GUIDATA

Con l'aiuto di Wiris troviamo le parabole del fascio $y = x^2 + kx + 2k - 1$ che individuano sulla retta $y = x + 3$ una corda lunga $3\sqrt{2}$. Tracciamo poi il grafico di tutto.

- Attiviamo Wiris, quindi apriamo il modello del sistema a due equazioni per inserirvi l'equazione del fascio di parabole e quella della retta (figura 1).

- Diamo *Calcola* e troviamo, in funzione di k , le coordinate dei punti di intersezione fra le parabole del fascio e la retta.

Un problema sulle parabole

$$\text{risolvere} \left\{ \begin{array}{l} y = (k+3) \cdot x^2 - k \cdot x + 1 \\ y = x + 3 \end{array} \right\}, \{x, y\} \rightarrow \left\{ \left\{ x = \frac{-2}{k+3}, y = \frac{3 \cdot k + 7}{k+3} \right\}, \{x = 1, y = 4\} \right\}$$

▲ Figura 1

- Esprimiamo la lunghezza della corda inserendo nella formula della distanza fra due punti le coordinate degli estremi (figura 2).

- Impostiamo e risolviamo l'equazione ottenuta uguagliando l'espressione in k a $3\sqrt{2}$.

- Sostituiamo nel fascio i due valori trovati di k , mettendo in evidenza le equazioni delle parabole che soddisfano l'ipotesi del problema.

$$d = \sqrt{\left(\frac{-2}{k+3} - 1\right)^2 + \left(\frac{3 \cdot k + 7}{k+3} - 4\right)^2};$$

$$\text{risolvere} (d = 3 \cdot \sqrt{2}) \rightarrow \left\{ k = -2, k = -\frac{7}{2} \right\}$$

$$\text{sostituire} (y = (k+3) \cdot x^2 - k \cdot x + 1, k, -2) \rightarrow y = x^2 + 2 \cdot x + 1$$

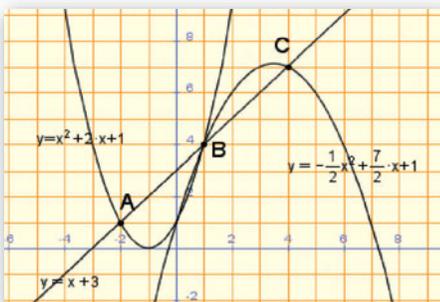
$$\text{sostituire} (y = (k+3) \cdot x^2 - k \cdot x + 1, k, -7/2) \rightarrow y = -\frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{7}{2} \cdot x + 1$$

▲ Figura 2

- Scriviamo infine le istruzioni necessarie (figura 3) per ottenere il grafico di figura 4.

```
tracciare({y=x^2+2·x+1, y=-1/2·x^2+7/2·x+1, y=x+3});
tracciare({punto(-2, 1), punto(1, 4), punto(4, 7)});
scrivere("A", punto(-2, 1.50), {dimensione_tipo_carattere = 18});
scrivere("B", punto(1.25, 3.50), {dimensione_tipo_carattere = 18});
scrivere("C", punto(3.50, 7.50), {dimensione_tipo_carattere = 18});
scrivere("y=x^2+2·x+1", punto(-5, 4));
scrivere("y=-1/2·x^2+7/2·x+1", punto(4, 3));
scrivere("y=x+3", punto(-5, -1.50));
```

◀ Figura 3



◀ Figura 4

ESERCITAZIONE GUIDATA

Con l'aiuto di Derive troviamo le parabole del fascio $y = (k + 3)x^2 - kx + 1$ che individuano sulla retta $y = x + 3$ una corda lunga $3\sqrt{2}$.

Tracciamo poi il grafico delle parabole trovate, dove mettiamo in evidenza le condizioni imposte.

Il procedimento risolutivo

- Mettiamo a sistema l'equazione del fascio di parabole e l'equazione della retta.
- Applichiamo il metodo di sostituzione e troviamo le ascisse dei punti di intersezione in funzione di k .
- Sostituiamo le espressioni che rappresentano le ascisse nell'equazione della retta e troviamo le corrispondenti ordinate.
- Scriviamo la formula che dà la distanza fra due punti attraverso le loro coordinate.
- Sostituiamo in essa il dato numerico a d e le espressioni trovate a x_1 , a x_2 , a y_1 e a y_2 , ricavando un'equazione avente come incognita k .
- Risolviamo l'equazione.
- Sostituiamo nel fascio i valori di k trovati.

La sessione di lavoro

- Con *Crea_Espressione* immettiamo le equazioni del fascio nella #1 e della retta nella #2 (figura 1).
- Applichiamo alla #1 il comando *Semplifica_Sostituisci variabili* e sostituiamo $x + 3$ alla y .
- Usiamo *Risolvi_Espressione* ricavando l'impostazione dell'equazione nella #4 e la sua soluzione nella #5.
- Applichiamo due volte *Semplifica_Sostituisci variabili* per sostituire nella #2, quella che contiene l'equazione della retta, le ascisse trovate e quindi ricavare le corrispondenti ordinate.

```
#1: y = (k + 3)·x2 - k·x + 1
#2: y = x + 3
#3: x + 3 = (k + 3)·x2 - k·x + 1
#4: SOLVE(x + 3 = (k + 3)·x2 - k·x + 1, x)
#5: x = -2/k + 3 ∨ x = 1
#6: y = 4
#7: y = 3 - 2/k + 3
```

► **Figura 1** Le coordinate dei due punti di intersezione in funzione del parametro k .

- Diamo *Crea_Espressione*, scriviamo nella riga di editazione $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ e la inseriamo con INVIO nella #8 (figura 2).
- Applichiamo *Semplifica_Sostituisci variabili* alla #8, facendo apparire la finestra di dialogo con i parametri della formula e con il campo addetto a ricevere le sostituzioni.
- Sostituiamo $3\sqrt{2}$, il valore imposto dal problema, a d , 1, il valore trovato, a x_1 , l'espressione con k che sta nella #5, a x_2 , 4, il valore trovato, a y_1 e l'espressione con k che sta nella #7 a y_2 . Per sostituire l'espressione a x_2 , invece di scriverla dalla tastiera, la possiamo importare dalla #5, facendo clic sulla #5, sull'ascissa, sull'espressione in k , sul campo della sostituzione e battendo F3.
- Operiamo similmente per importare l'espressione da sostituire a y_2 .
- Ricaviamo con *Risolvi_Espressione* l'impostazione dell'equazione nella #10 e le soluzioni nella #11.

```
#8: d2 = (x2 - x1)2 + (y2 - y1)2
#9: (3·√2)2 = (-2/k+3 - 1)2 + ((3 - 2/k+3) - 4)2
#10: SOLVE((3·√2)2 = (-2/k+3 - 1)2 + ((3 - 2/k+3) - 4)2, k)
#11: k = -7/2 ∨ k = -2
```

◀ **Figura 2** I valori del parametro k .

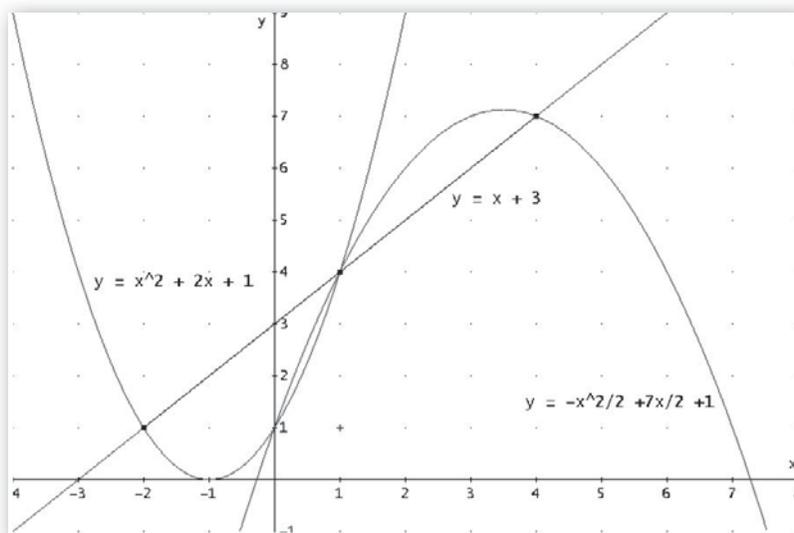
• Sostituiamo con *Semplifica_Sostituisci variabili* nell'etichetta #1, quella che contiene l'equazione del fascio, i valori di k trovati e ricaviamo, nella #12 e nella #13, le equazioni delle due parabole che risolvono il problema (figura 3).

$$\begin{aligned} \#12: y &= x^2 + 2x + 1 \\ \#13: y &= -\frac{x^2}{2} + \frac{7x}{2} + 1 \end{aligned}$$

◀ Figura 3 Le parabole richieste dal problema.

Il grafico

Lasciamo a te il compito di realizzare un grafico come quello che vedi in figura 4.



◀ Figura 4 Il grafico delle due parabole e della retta.

Esercitazioni

Per ognuno dei seguenti problemi scrivi uno schema risolutivo e con il computer svolgi i calcoli, effettua le verifiche opportune e traccia i grafici.

- 1 Determina l'equazione della parabola circoscritta al triangolo i cui lati stanno sulle rette di equazioni $y = x - 5$, $y = -2x + 10$ e $y = -5x + 7$. $[y = x^2 - 6x + 5]$
- 2 Determina l'equazione della circonferenza di diametro MN , dove i punti M e N sono le intersezioni della retta di equazione $y = 2x + 2$ con la parabola con il vertice nel punto $V(2; 9)$ e passante per il punto $P(5; 0)$. $[x^2 + y^2 - 2x - 8y - 3 = 0]$
- 3 Determina l'equazione della circonferenza con il centro nel punto $C(0; \frac{9}{2})$ e tangente internamente alla parabola di equazione $y = x^2$. $[x^2 + y^2 - 9y + 16 = 0]$
- 4 Trova le coordinate di D , quarto punto in comune fra la circonferenza e la parabola passanti per i punti $A(-2; 4)$, $B(5; 5)$, $C(7; 1)$. $[D(-\frac{14}{5}; \frac{12}{5})]$

5 Determina l'equazione della retta che è tangente alla parabola di equazione $y = -x^2$ e forma con i semiassi positivi della x e della y un triangolo di area $\frac{27}{4}$. [$y = -6x + 9$]

6 Nel seguente fascio di parabole determina, con il computer, gli eventuali punti base e i valori del parametro reale k che individuano le parabole che soddisfano le condizioni indicate. Traccia il grafico delle corrispondenti parabole.

$$y = x^2 - (k - 2)x - 2k + 2;$$

a) avente il vertice sulla retta di equazione $x = 3$;

b) aventi il vertice sulla retta di equazione $y = 2x + \frac{3}{4}$;

c) staccanti sull'asse x un segmento lungo 1.

[(-2; 2); a) 8; b) -9, 1; c) -5, 1]

7 Trova le coordinate del punto P , sapendo che dista 5 dall'origine e che appartiene alla parabola passante per il punto $A(2; -1)$ e avente il vertice nel punto $V(1; 0)$. [(3; -4) ∨ (-1,20; -4,85)]