LABORATORIO DI MATEMATICA
LE CONICHE

ESERCITAZIONE GUIDATA

Data l'equazione di un fascio di coniche

$$(k+1)x^2 - ky^2 + 2y - 4 = 0, \quad \text{con } k \in R,$$

con l'aiuto di Derive troviamo le coordinate dei punti comuni a tutte le coniche e ricaviamo i valori di k che corrispondono alle equazioni delle iperboli con l'asse trasverso parallelo all'asse y.
Tracciamo, per verifica, il grafico di tre di tali iperboli.

La sessione di lavoro

- Entriamo in ambiente Derive e scriviamo il titolo del lavoro con il comando *Inserisci_Testo* (figura 1).
- Con *Crea_Espressione* inseriamo nella #1 l'equazione del fascio di coniche.
- Applichiamo il comando *Semplifica_Sviluppa Triviale rispetto a k* per ottenere nella #2 l'equazione con il parametro k raccolto.
- Mettiamo a sistema le equazioni di due coniche, che ricaviamo dalla #2, all'interno della funzione SOLUTIONS, che dà le soluzioni in forma tabellare (figura 2).
- Risolviamo il sistema con *Semplifica_Base* (figura 2).
- Cerchiamo le coordinate xC e yC del centro della conica in funzione del parametro k: con *Semplifica_Sostituisci variabili* sostituiamo nella #1 x + xC a x e y + yC a y, le equazioni della traslazione del riferimento canonico, ottenendo la #5 (figura 3).

Un problema sulle coniche

#1: $x^2\cdot(k+1) - k\cdot y^2 + 2\cdot y - 4 = 0$

#2: $k\cdot(x^2 - y^2) + x^2 + 2\cdot y = 2^2$

▲ Figura 1

Troviamo le coordinate dei punti comuni.

#3: $\text{SOLUTIONS}\left(\left[x^2 - y^2 = 0, x^2 + 2\cdot y - 4 = 0\right], [x, y]\right)$

#4: $\begin{bmatrix} \sqrt{5}+1 & -\sqrt{5}-1 \\ \sqrt{5}-1 & \sqrt{5}-1 \\ 1-\sqrt{5} & \sqrt{5}-1 \\ -\sqrt{5}-1 & -\sqrt{5}-1 \end{bmatrix}$

▲ Figura 2

Determiniamo le coordinate del centro in funzione di k.

#5: $x^2\cdot(k+1) + 2\cdot xC\cdot x\cdot(k+1) - k\cdot y^2 + 2\cdot y\cdot(1 - k\cdot yC) + k\cdot(xC^2 - yC^2) + xC^2 + 2\cdot yC - 4 = 0$

#6: $\text{SOLVE}(2\cdot(1 - k\cdot yC) = 0, yC)$

#7: $yC = \dfrac{1}{k}$

◄ Figura 3

- Dalla #5 notiamo che il termine in x si annulla ponendo $xc = 0$.
- Cerchiamo il valore di yc che annulli il termine in y, impostando nella #6 l'equazione formata dal suo coefficiente uguagliato a 0.
- Con *Semplifica_Base*, applicato alla #6, troviamo nella #7 l'ordinata del centro in funzione di k.
- Imponiamo la traslazione che annulla i termini di primo grado, sostituendo nella #1 $y + 1/k$ a y (figura 4).
- Diamo *Semplifica_Sviluppa Triviale rispetto a x e a y* e otteniamo la #9.

Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

• Per concludere la riduzione dell'equazione in forma canonica, dividiamo l'equazione per il termine noto: diamo *Crea_Espressione*, evidenziamo con un clic la #9, battiamo F4 (importando nella riga di editazione delle espressioni l'equazione posta fra parentesi tonde), digitiamo di seguito /(4k − 1)/k (il termine noto) e battiamo INVIO. Otteniamo così nella #10 l'impostazione della riduzione a forma canonica.

• Con *Semplifica_Sviluppa Triviale rispetto a x e a y* ricaviamo nella #11 l'equazione canonica.

• Se nell'equazione canonica il coefficiente di x^2 è minore di 0 e il coefficiente di y^2 è maggiore di 0, l'equazione rappresenta un'iperbole con l'asse trasverso parallelo all'asse y. Imponiamo tale condizione impostando un sistema di disequazioni nel quale la prima disequazione è formata dal coefficiente di x^2 posto minore di 0 e la seconda è formata dal coefficiente di y^2 posto maggiore di 0, entrambi importati dall'etichetta #11 (figura 5).

• Diamo *Semplifica_Base* e ricaviamo i valori di k che corrispondono alle equazioni delle iperboli richieste.

Il grafico

• Per scrivere le equazioni di tre iperboli, usiamo la funzione VECTOR. Scegliamo tre valori del parametro k, -4, -2 e $\frac{1}{6}$, appartenenti agli intervalli trovati, quindi nella riga di editazione digitiamo VECTOR(, importiamo l'equazione contenuta nella #1 con F3, digitiamo , k, [−4, − 2, 1/6]) e battiamo INVIO (figura 6).

• Diamo *Semplifica_Base* e vediamo comparire le equazioni nella #15.

• Con *Finestra_Grafica 2D* entriamo in ambiente grafico, dove con *Traccia il grafico* tracciamo il grafico delle tre iperboli.

• Torniamo in ambiente algebrico, evidenziamo la #4, contenente le coordinate dei punti comuni, ritorniamo in grafica, dove evidenziamo i quattro punti.

• Con *Imposta_Rapporto d'aspetto* e *Resetta* rendiamo monometrico il riferimento cartesiano e vediamo il grafico di figura 7.

Riduciamo l'equazione a forma canonica.

#8: $x^2\cdot(k+1)-k\cdot\left(y+\frac{1}{k}\right)^2+2\cdot\left(y+\frac{1}{k}\right)-4=0$

#9: $x^2\cdot(k+1)-k\cdot y^2-\frac{4\cdot k-1}{k}=0$

#10: $\dfrac{x^2\cdot(k+1)-k\cdot y^2-\frac{4\cdot k-1}{k}=0}{\frac{4\cdot k-1}{k}}$

#11: $\frac{k\cdot x^2\cdot(k+1)}{4\cdot k-1}+\frac{k^2\cdot y^2}{1-4\cdot k}-1=0$

▲ **Figura 4**

Imponiamo ai coefficienti di assumere i segni corrispondenti alle iperboli con l'asse trasverso parallelo all'asse y.

#12: $\mathrm{SOLVE}\left(\left[\frac{k\cdot(k+1)}{4\cdot k-1}<0,\ \frac{k^2}{1-4\cdot k}>0\right],\ k\right)$

#13: $\left[k<-1,\ 0<k<\frac{1}{4}\right]$

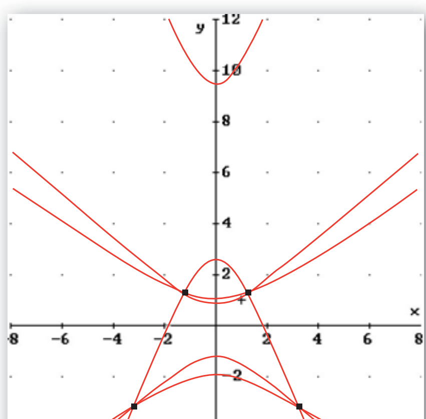
▲ **Figura 5**

Scegliamo tre valori di k appartenenti agli intervalli trovati.

#14: $\mathrm{VECTOR}\left(x^2\cdot(k+1)-k\cdot y^2+2\cdot y-4=0,\ k,\ \left[-4,-2,\frac{1}{6}\right]\right)$

#15: $\left[3\cdot x^2-2\cdot y\cdot(2\cdot y+1)=-4,\ x^2-2\cdot y\cdot(y+1)=-4,\ 7\cdot x^2-y^2+12\cdot y=24\right]$

▲ **Figura 6**



▶ **Figura 7** Le iperboli corrispondenti ai valori -4, -2 e $\frac{1}{6}$ del parametro k.

Esercitazioni

Determina, con il computer, le equazioni delle seguenti coniche, studiale, riducile a forma canonica, traccia entrambi i grafici nel medesimo riferimento cartesiano e trova ciò che è richiesto.

1 L'ellisse di fuochi $F_1(-1; -2)$ e $F_2(-1; 4)$ e di semiasse maggiore $b = 5$.
L'equazione della tangente nel suo punto di ordinata 4 e di ascissa positiva.

$$\left[25x^2 + 16y^2 + 50x - 32y - 359 = 0;\ y = -\frac{5}{3}x + \frac{23}{3}\right]$$

2 L'ellisse di fuochi $F_1\left(1; -\frac{4}{5}\right)$ e $F_2\left(1; \frac{4}{5}\right)$ e di semiasse maggiore $b = 1$.
Le coordinate delle intersezioni con gli assi cartesiani.

$$\left[25x^2 + 9y^2 - 50x + 16 = 0;\ \left(\frac{2}{5}; 0\right), \left(\frac{8}{5}; 0\right), \text{non incontra l'asse } y\right]$$

3 L'ellisse di vertici $V_1\left(0; -\frac{5}{2}\right)$, $V_2\left(2; -\frac{7}{2}\right)$, $V_3\left(4; -\frac{5}{2}\right)$ e $V_4\left(2; -\frac{3}{2}\right)$.
Le coordinate delle intersezioni con la retta $3x + 8y + 4 = 0$.

$$\left[x^2 + 4y^2 - 4x + 20y + 25 = 0;\ \left(\frac{16}{5}; -\frac{17}{10}\right)\right]$$

Usa il computer per studiare le equazioni delle coniche seguenti, trova ciò che è richiesto e traccia i grafici della conica e dei suoi punti salienti.

4 La parabola $y^2 + 12x - 4y + 16 = 0$.
L'equazione della tangente parallela alla retta di equazione $y = -x$. $[y = -x + 4]$

5 L'iperbole $9x^2 - 16y^2 - 10x + 32y = 0$.
L'equazione delle tangenti nei punti di intersezione con l'asse y. $\left[y = \frac{5}{16}x \text{ e } y = -\frac{5}{16}x + 2\right]$

6 L'iperbole $-x^2 + y^2 - 2x + 6y - 1 = 0$.
Le intersezioni con la circonferenza di centro $\Omega(0; 3)$ e raggio $r = \sqrt{10}$. $[(-1; 0) \text{ e } (3; 2)]$

Per ognuna delle seguenti equazioni di secondo grado in *x* e *y* fai uso del computer per studiare il carattere della conica in relazione ai valori del parametro *k*. Trova i punti comuni a tutte le coniche. Successivamente determina le coniche che soddisfano le condizioni indicate. Inoltre, traccia il grafico delle coniche trovate ed evidenzia in esso i punti comuni.

7 $x^2 - y^2 + 3kx - 5ky - 16 = 0$.
a) Passante per il punto $P(5; -3)$.
b) Avente il centro in un punto di ascissa $-\frac{3}{2}$.
c) Avente il centro in un punto di ordinata -10.
d) Avente un vertice di ascissa -5.

$$\left[k \neq -2 \text{ e } k \neq 2\text{: iperboli equilatere; } k = -2 \text{ e } k = 2\text{: rette; } (-5; -3) \text{ e } (5; 3);\right.$$
$$\left.\text{a) } k = 0;\ \text{b) } k = 1;\ \text{c) } k = 4;\ \text{d) } k = \frac{6}{5} \vee k = \frac{10}{3}\right]$$

8 $kx^2 + ky^2 - 2x - y - 4k + 4 = 0$.

a) La circonferenza con il raggio $r = \frac{\sqrt{37}}{2}$.

b) Avente l'ascissa del centro uguale a -1.

c) Formanti con l'asse y una corda di misura 1.

d) Tangenti alla retta di equazione $x = 3$.

$\left[k \neq 0\text{: circonferenze; } k = 0\text{: retta; } \left(\frac{6}{5}; \frac{8}{5}\right) \text{ e } (2; 0)\text{; a) } k = \frac{5}{21} \text{ e } k = -1;\right.$
$\left.\text{b) } k = -1\text{; c) } k = \frac{1}{15} \text{ e } k = 1\text{; d) } k = -\frac{1}{10} \text{ e } k = \frac{1}{2}\right]$

Per ognuno dei sequenti casi, scrivi una funzione con il computer che legga i valori dei dati e dia in uscita, se possibile, i valori delle grandezze indicate. Applica le funzioni per verificare le soluzioni di problemi precedentemente svolti.

9 Dati i coefficienti dell'equazione $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, indica il tipo di conica che rappresenta e determina la sua equazione canonica.

10 Dati i coefficienti della conica di equazione $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, trova le coordinate delle sue eventuali intersezioni con gli assi cartesiani.

11 Conoscendo le coordinate dei fuochi F_1 e F_2 e il semiasse maggiore a di un'ellisse, determina la sua equazione.

12 Conoscendo le coordinate dei fuochi F_1 e F_2 e il semiasse trasverso a di un'iperbole, determina la sua equazione.

13 Dati i coefficienti h e k della conica di equazione $hx^2 + ky^2 = 1$, calcola sua eccentricità.