LABORATORIO DI MATEMATICA
I NUMERI COMPLESSI

ESERCITAZIONE GUIDATA

Costruiamo un foglio elettronico, tramite Excel, che, letti la parte reale a e il coefficiente b della parte immaginaria, calcoli le n radici n-esime del numero complesso $a + bi$.
Troviamo con il foglio le tre radici cubiche di i ($a = 0$ e $b = 1$).

L'analisi del problema

Per ricavare le radici n-esime di un numero complesso $a + bi$ ricorriamo alla formula di De Moivre $c_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$, con $k = 0, 1, \dots, n - 1$, calcolandone i vari termini.

In particolare, otteniamo l'argomento α operando i seguenti controlli su a e su b:

se $a = 0$ e $b < 0$, $\alpha = \frac{3}{2}\pi$; se $a = 0$ e $b \geq 0$, $\alpha = \frac{1}{2}\pi$;

se $a > 0$ e $b \geq 0$, $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$; se $a > 0$ e $b < 0$, $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} + 2\pi$;

se ($a < 0$ e $b \geq 0$) o ($a < 0$ e $b < 0$), $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} + \pi$.

La costruzione del foglio

- Scriviamo delle indicazioni e mettiamo dei bordi alle celle B4, D4 e I4 per segnalare dove immettere i valori dei coefficienti a e b e l'indice n della radice, e inseriamo delle didascalie per leggere i risultati (figura 1).
- In B6 digitiamo =RADQ(B4^2 + D4^2) per il calcolo di $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- In E6 inseriamo la formula con le condizioni per determinare α: = SE(B4 = 0; SE(D4 < 0; 3*PI.GRECO()/2; PI.GRECO()/2); SE(B4 > 0; SE(D4 > 0; ARCTAN(D4/B4); ARCTAN(D4/B4) + 2*PI.GRECO()); ARCTAN(D4/B4) + PI.GRECO())).
- In F6, trasformiamo α in gradi con =E6*180/PI.GRECO().
- Calcoliamo la radice aritmetica n-esima di r con =B6^(1/I4) in B7.
- In E7 scriviamo =E6/I4 per calcolare $\theta = \frac{\alpha}{n}$.
- In F7, trasformiamo θ in gradi con =E7*180/PI.GRECO().
- In I7, digitiamo =2*PI.GRECO()/I4 per ricavare $\Delta\alpha = \frac{2\pi}{n}$.
- In J7, trasformiamo $\Delta\alpha$ in gradi scrivendo =I7*180/PI.GRECO().
- Per sviluppare le radici dalla formula di De Moivre, mettiamo un contatore nella colonna A che parta da 0 e si fermi a $n - 1$; in A10 digitiamo pertanto 0 e in A11 =SE(0(A10 = I4 − 1; A10 = "/"); "/"; A10 + 1) e la copiamo sino alla A14 (rendiamo la tabella atta a contenere sino alle radici quinte).
- Nelle seguenti celle scriviamo le formule per rappresentare le n radici sotto forma trigonometrica e sotto forma algebrica. In ognuna inseriamo un controllo riferito alla colonna A, che, se l'indice $n - 1$ è superato, lasci la cella vuota.

```
B10   =SE(A10 = "/"; ""; $B$7)
D10   =SE(A10 = "/"; ""; $F$7 + A10*$J$7)
F10   =SE(A10 = "/"; ""; $F$7 + A10*$J$7)
H10   =SE(A10 = "/"; ""; $B$7*COS($E$7 + A10*$I$7))
J10   =SE(A10 = "/"; ""; $B$7*SEN($E$7 + A10*$I$7))
```

C10 =SE(A10 = “/”; “”; “*(COS(”)
E10 =SE(A10 = “/”; “”; ”) + i*SEN(”)
G10 =SE(A10 = “/”; “”; ”))”)
I10 =SE(A10 = “/”; “”; ” + i*”)

- Copiamo quindi la zona B10:J10 sino alla riga 14.
- Mettiamo dei bordi alle tabelle delle radici.

L’applicazione del foglio

- Per trovare le radici cubiche di *i*, in B4 digitiamo 0, in D4 1e in I4 3.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Le radici di un numero complesso									
2										
3	Inserisci i coefficienti del numero complesso a + b i e l'indice della radice									
4	a =	0,0000	b =	1,0000				n =	3	
5										
6	r =	1,0000		α =	1,5708	90				
7	r^(1/n) =	1,0000		α/n =	0,5236	30		Δ di α =	2,0944	120
8										
9	k	Le radici sotto forma trigonometrica						Le radici sotto forma algebrica		
10	0	1,0000	* (COS(	30	)+ i*SEN	30	))	0,8660	+ i *	0,5000
11	1	1,0000	* (COS(	150	)+ i*SEN	150	))	-0,8660	+ i *	0,5000
12	2	1,0000	* (COS(	270	)+ i*SEN	270	))	0,0000	+ i *	-1,0000
13	/									
14	/									

▲ **Figura 1** Il foglio con le radici cubiche di *i*.

Esercitazioni

Per ognuna delle seguenti espressioni costruisci un foglio che, letti i coefficienti dei numeri complessi in esse contenute, li trasformi in forma trigonometrica, semplifichi l’espressione e trasformi il risultato in forma algebrica. Prova il foglio con i dati indicati a fianco. Sul quaderno semplifica algebricamente l’espressione con i medesimi dati.

1 $(a + bi)^3 (c + di)^2 (e + fi)$. Prova con $a = -1$, $b = -1$, $c = 2$, $d = 1$, $e = 0$ e $f = -1$. [$2 - 14i$]

2 $\dfrac{(a + bi)^3 (e + fi)}{(c + di)^2}$. Prova con $a = -1$, $b = -1$, $c = 2$, $d = 1$, $e = -3$ e $f = 1$. [$0{,}8 + 1{,}6i$]

3 Costruisci un foglio che, letti la parte reale e il coefficiente della parte immaginaria dei seguenti numeri complessi, fornisca i risultati richiesti.
Tre numeri complessi; risultato: l’espressione $\dfrac{a + bi}{c + di}(e + fi)$ semplificata.

I grafici di curve in coordinate polari

Con l'aiuto del computer traccia i grafici delle seguenti curve, le cui equazioni sono date in coordinate polari, assegnando al parametro il valore consigliato e altri valori a tua scelta.

4 $r = \frac{1}{1 - e\cos\alpha}$, con $e = 0{,}5$ (ellisse).

5 $r = 1 + a\cos\alpha$, con $a = 2$ (cardioide).

6 $r = \mathrm{sen}(n\alpha)$, con $n = 2$ (rodonea).

7 $r = k\alpha$, con $k = 1$ (spirale di Archimede).

8 $r = \frac{k}{\alpha}$, con $k = 10$ (spirale di Galilei).

9 $r = 10e^{m\alpha}$, con $m = -1$ (spirale logaritmica).

10 $r = a\cos\alpha - \frac{1}{\cos\alpha}$, con $a = 4$ (trisettrice di Mac Laurin).