LABORATORIO DI MATEMATICA
LE MATRICI E I DETERMINANTI

Alcune funzioni sulle matrici di Derive

La funzione	serve per ottenere
DET(M)	il determinante della matrice *M*.
M^(− 1)	l'inversa della matrice *M*.

La funzione	serve per ottenere
M′	la trasposta della matrice *M*.
ELEMENT(*M*, *m*, *n*)	l'elemento della matrice *M* di riga *m* e di colonna *n*.

La funzione	crea una matrice formata dalla matrice *M*
INSERT(*r*, *M*, *n*)	con l'inserimento della riga *r* dopo la riga di indice *n*.
REPLACE(*r*, *M*, *n*)	con la sostituzione della riga di indice *n* con la riga *r*.
DELETE(*M*, *n*)	con la cancellazione della riga di indice *n*.
ADJOIN(*r*, *M*)	con l'aggiunta della riga *r*.
APPEND(*M*, *M1*)	saldata alla matrice *M1*.

L'assegnazione M↓i↓j : = p sostituisce l'elemento della matrice *M* di riga *i* e colonna *j* con l'elemento *p*.

ESERCITAZIONE GUIDATA

Con l'aiuto di Derive discutiamo il rango della matrice

$$M\begin{bmatrix} k & 2 & 1-k \\ k^2-2k & -2k & 0 \end{bmatrix}$$

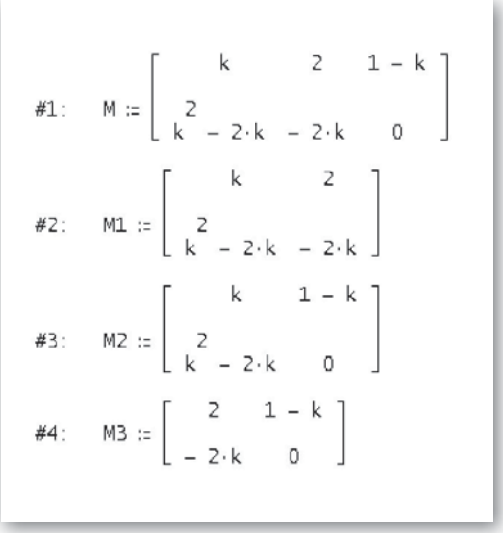
in relazione ai valori che può assumere il parametro reale *k*.

L'analisi del problema

La matrice *M* ha dimensione 2 × 3 e da essa possiamo estrarre tre sottomatrici quadrate di ordine due.
Se stabiliamo che il determinante di una di esse (un minore di *M* di ordine 2) è ≠ da 0, *M* ha rango 2.
Se tutti e tre i minori risultano nulli, poiché un elemento di *M* è ≠ da 0, *M* ha rango 1.

Le sottomatrici di *M*

- Nella riga di editazione scriviamo la matrice dandole il nome *M*, M : = [k, 2, 1 −k; k^2 − 2k, −2k, 0] e con INVIO la immettiamo nella #1 (figura 1).
- Da essa estraiamo le tre sottomatrici quadrate di ordine 2. Digitiamo M1 : =, importiamo con F3 nella riga di editazione la *M*, cancelliamo gli elementi dell'ultima colonna e con INVIO immettiamo nella #2 la prima sottomatrice.
- Operiamo in modo simile per ottenere nella #3 la seconda sottomatrice *M2* e nella #4 la terza sottomatrice *M3*.



▲ Figura 1

I minori di *M*

- Per calcolare il determinante di *M1*, un minore di *M*, scriviamo l'espressione DET(M1) e la inseriamo nella #5.
- Su di essa diamo *Semplifica_Base* ottenendo nella #6 il determinante di *M1* in funzione di *k*.
- Applichiamo *Risolvi_Espressione*, ricavando nella #8 i valori di *k* che annullano *M1*.
- Svolgendo le medesime operazioni, troviamo rispettivamente nella #12 e nella #16 i valori di *k* che annullano i determinanti di *M2* e di *M3*.

Dai risultati ottenuti ricaviamo che:

- per $k \neq 0$ e $k \neq 1$, il determinante di *M1* è diverso da 0, quindi il rango di *M* è 2.
- per $k = 0$ o $k = 1$, i determinanti di *M1*, *M2* e *M3* si annullano e, poiché in *M* troviamo almeno un elemento diverso da 0, il rango di *M* è 1.

```
#5:   DET(M1)
#6:   4·k·(1 − k)
#7:   SOLVE(4·k·(1 − k), k)
#8:   k = 1 ∨ k = 0
#9:   DET(M2)
#10:  k·(k − 1)·(k − 2)
#11:  SOLVE(k·(k − 1)·(k − 2), k)
#12:  k = 2 ∨ k = 1 ∨ k = 0
#13:  DET(M3)
#14:  2·k·(1 − k)
#15:  SOLVE(2·k·(1 − k), k)
#16:  k = 1 ∨ k = 0
```

▲ **Figura 2**

Esercitazioni

Con l'aiuto del computer, supponendo che *A*, *B* e *C* siano le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -8 \end{bmatrix},$$

stabilisci o meno la validità delle seguenti uguaglianze.

1 $A \cdot B = B \cdot A$ [falsa]

2 $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ [vera]

3 $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ [vera]

4 $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$ [falsa]

5 $(A - B) - C = A - (B - C)$ [falsa]

6 $(B + C) / A = B / A + C / A$

(Suggerimento. Per dividere una matrice *M* per una matrice *A*, si moltiplica *M* per l'inversa di *A*, dopo aver controllato che $\mathrm{DET}(A) \neq 0$: $(M / A = M \cdot A^{-1})$.) [se $DET(A) \neq 0$, vera]

7 Verifica che:

$\mathrm{DET}(A + B) \neq \mathrm{DET}(A) + \mathrm{DET}(B)$,

$\mathrm{DET}(A \cdot B) = \mathrm{DET}(B \cdot A) = \mathrm{DET}(A) \cdot \mathrm{DET}(B)$,

$\mathrm{DET}(A / B) = \mathrm{DET}(A) / \mathrm{DET}(B)$, se $\mathrm{DET}(B) \neq 0$.

Con l'aiuto del computer semplifica le espressioni indicate, dove A, B e C sono le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 1 & -8 & -1 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 11 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calcola poi il determinante della matrice risultato. Ricava poi il valore dell'espressione sostituendo ad A, B e C i corrispondenti determinanti.

8 $(A \cdot B) / C$ [25]

9 $B \cdot (A / C)$ [25]

10 $A \cdot B \cdot A^{-1}$ [-35]

11 $(A / B) \cdot (C / A)$ $\left[\frac{3}{5}\right]$

12 $(B \cdot A^2 \cdot B^2) / C^3$ $\left[\frac{3125}{3}\right]$

13 $(A^2 \cdot C^3) / (C^2 \cdot B^4)$ $\left[-\frac{27}{8575}\right]$

Con l'aiuto del computer studia il rango delle seguenti matrici al variare di k.

14 $\begin{bmatrix} k & 2 & 3 \\ k^2 - 2k & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$ [se $k = 0$ o $k = 2$, rango 2; altrimenti rango 3]

15 $\begin{bmatrix} 1 & -2 & k & -1 \\ -2k & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -8 & -2 \end{bmatrix}$ [se $k = 1$, rango 2; altrimenti rango 3]

16 $\begin{bmatrix} 4 & 1 & k \\ k^2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ [se $k = 2$, rango 1; altrimenti rango 2]

Con l'aiuto del computer studia il rango delle seguenti matrici al variare di h e di k.

17 $\begin{bmatrix} h & -1 & 3 \\ k-4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ [se $h = 10 - k$, rango 2; altrimenti rango 3]

18 $\begin{bmatrix} 1 & h & -3 \\ k^2 - k & 1 & -6 \end{bmatrix}$ $\left[\text{se } h = \frac{1}{2} \text{ e } (k = -1 \text{ o } k = 2), \text{ rango 1; altrimenti rango 2}\right]$

19 $\begin{bmatrix} h & -1 & 3-h \\ k-4 & 1 & 2k-1 \\ 3k & 0 & -2 \end{bmatrix}$ $\left[\text{se } k = \frac{2}{3} \text{ o } k = \frac{h-4}{2}, \text{ rango 2; altrimenti rango 3}\right]$

Date le seguenti equazioni di fasci di coniche, mediante l'uso del computer classifica i tipi di conica in relazione ai valori che può assumere il parametro reale k. Trova gli eventuali punti comuni a tutte le coniche. Traccia i grafici delle coniche corrispondenti ai valori di k indicati a fianco.

20 $(1-k)x^2 - ky^2 + 2x + 2y = 0$, k va da -2 a 2 con passo 0,25.
[$k < 0$: ellissi; $k = 0$: parabola; $0 < k < 1$: iperboli; $k = 1$: parabola; $k > 1$: ellissi; $(0; 0)$]

21 $x^2 - kyx - y + k = 0$, k va da -4 a 4 con passo 1.
[Tutte iperboli tranne $k = 0$ e $k = -1$: degeneri; $(1; 1)$]

22 $(9k+1)x^2 + (1-16k)y^2 - 25 = 0$, $k \in \left\{-1, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{12}, 0, \frac{288}{25}, \frac{2}{7}, 1\right\}$.
$\left[k < -\frac{1}{9}\right.$: iperboli; $k = -\frac{1}{9}$: degenere; $-\frac{1}{9} < k < \frac{1}{16}$: ellissi ($k = 0$: circonf.);
$\left.k = \frac{1}{16}\right.$: degenere; $k > \frac{1}{16}$: iperboli ($k = \frac{2}{7}$: equil.); $(4; 3)$, $(4; -3)$, $(-4; 3)$, $(-4; -3)\Big]$

23 $6kx + 12(k-1)xy + y^2 + 24x + 24 = 0, \qquad k \in \left\{0, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2\right\}.$

$\left[k < \frac{2}{3}\ \left(k = -\frac{1}{6}\right.\right.$ equil.) e $k > \frac{3}{2}$: iperboli; $k = \frac{2}{3}$ e $k = \frac{3}{2}$: parabole;
$\frac{2}{3} < k < 1$ e $\frac{7}{6} < k < \frac{3}{2}$: ellissi reali; $k = \frac{2}{3}$ e $k = \frac{3}{2}$: degeneri; $1 < k < \frac{7}{6}$: ellissi immaginarie;$\Big]$

24 $25(k-1)x^2 - 22ky^2 + 50(k-3)x + 50(2-k)y + 25 = 0, \qquad k \in \left\{-1, 0, \frac{1}{6}, \frac{25}{47}, 1, \frac{25}{3}, 9\right\}.$

$\Big[k < 0$ e $k > 1$: iperboli $\left(k = \frac{25}{3}\right.$ equil.$\Big)$; $k = 0$ e $k = 1$: parabole; $0 < k < 1$: ellissi $\left(k\ \frac{25}{47}\right.$ circonf.$\Big)$;
$k = 10$ e $k = -\frac{5}{3}$ e $k = 2$: degeneri; $(-9{,}44; 7{,}87)$, $(1{,}95; -2{,}23)$, $(-1{,}03; -1{,}53)$, $(0{,}43; 0{,}43)\Big]$