LABORATORIO DI MATEMATICA
I SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI

Alcune funzioni sulle matrici di Excel

La funzione	restituisce
MATR.DETERM(*m*)	il determinante della matrice quadrata *m*, esistente nel foglio e precisata dalle celle rispettivamente in alto a sinistra e in basso a destra, separate dal simbolo : (due punti).
MATR.INVERSA(*m*)	la matrice inversa della matrice *m*, dopo aver selezionato una zona del foglio delle medesime dimensioni di *m*, digitato la funzione con l'operando *m* e battuto contemporaneamente i tasti CTRL, MAIUSC e INVIO.
MATR.PRODOTTO (*m1*; *m2*)	il prodotto delle matrici *m1* e *m2* dopo aver selezionato una zona del foglio delle dimensioni della matrice prodotto, digitato il nome della funzione con gli operandi *m1* e *m2* e battuto contemporaneamente i tasti CTRL, MAIUSC e INVIO.

ESERCITAZIONE GUIDATA

Costruiamo un foglio per risolvere il seguente sistema lineare a tre equazioni e a tre incognite:

$$\begin{cases} 3x - 3(k-2)y + 25z = -5k \\ 6x - 2ky + 30z = -2 \\ 3k^2x - (4+3k)y = k+4 \end{cases}$$

dopo aver inserito il valore del parametro *k*.
Proviamo il foglio con $k = 2$, 1 e 4.

Il titolo, le didascalie e i dati del sistema

- Facciamo doppio clic sull'icona di Excel ed entriamo in un nuovo foglio.
- Per rendere leggibile il lavoro utilizziamo delle didascalie, come vediamo in figura 1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Il sistema lineare dell'esercitazione guidata									
2										
3	Introduci il valore del parametro k					k =	2			
4										
5	Inserisci i coefficienti numerici o le relazioni che essi hanno con il parametro									
6	3	* x +	0	* y +	25	* z =	-10			
7	6	* x +	-4	* y +	30	* z =	-2			
8	12	* x +	-10	* y +	0	* z =	6			
9										
10	Le matrici del sistema e i relativi determinanti									
11	3	0	25			-10	0	25		
12	6	-4	30	D =	600	-2	-4	30	D x =	-1900
13	12	-10	0			6	-10	0		
14										
15	3	-10	25			3	0	-10		
16	6	-2	30	D y =	-2640	6	-4	-2	D z =	-12
17	12	6	0			12	-10	6		
18										
19	Il sistema è		determinato							
20										
21		La soluzione					Una verifica			
22		x =	-3,167				-10			
23		y =	-4,400				-2			
24		z =	-0,020				6			

◀ **Figura 1** Il foglio con i dati e con i risultati del sistema lineare.

- Mettiamo un bordo alla G3, la cella adibita a contenere il valore del parametro *k*.
- Immettiamo i coefficienti numerici del sistema nelle opportune celle.
- Digitiamo le formule dei coefficienti che dipendono da *k*:

= − 3 * (G3 − 2) in C6,	= − 5 * G3 in G6,	= − 2 * G3 in C7,
= 3 * G3^2 in A8,	= − (3 * G3 + 4) in C8,	= G3 + 4 in G8.

Le matrici per il metodo di Cramer

- Risolviamo il sistema con il metodo di Cramer, pertanto costruiamo le matrici, necessarie per la sua applicazione, digitando rispettivamente nelle celle indicate i vari trasferimenti dei coefficienti originali del sistema.

Per la matrice delle incognite	della *x*	della *y*	della *z*
= A6 in A11	= G6 in F11	= A6 in A15	= A6 in F15
= A7 in A12	= G7 in F12	= A7 in A16	= A7 in F16
= A8 in A13	= G8 in F13	= A8 in A17	= A8 in F17
= C6 in B11	= C6 in G11	= G6 in B15	= C6 in G15
= C7 in B12	= C7 in G12	= G7 in B16	= C7 in G16
= C8 in B13	= C8 in G13	= G8 in B17	= C8 in G17
= E6 in C11	= E6 in H11	= E6 in C15	= G6 in H15
= E7 in C12	= E7 in H12	= E7 in C16	= G7 in H16
= E8 in C13	= E8 in H13	= E8 in C17	= G8 in H17

I quattro determinanti

- Per ottenere i valori dei determinanti digitiamo le seguenti formule.

Per il calcolo del determinante	nella cella	scriviamo:
dei coefficienti delle incognite	E12	= ARROTONDA(MATR.DETERM(A11:C13); 12)
della *x*	J12	= ARROTONDA(MATR.DETERM(F11:H13); 12)
della *y*	E16	= ARROTONDA(MATR.DETERM(A15:C17); 12)
della *z*	J16	= ARROTONDA(MATR.DETERM(F15:H17); 12)

Nota. Excel svolge i calcoli con procedimenti approssimati molto raffinati, però a volte il numero delle operazioni è tale che l'errore di arrotondamento si propaga e compare nelle prime cifre decimali. Per tale motivo, per ottenere il valore zero di alcuni determinanti, abbiamo posto l'arrotondamento a dodici cifre decimali.

Il carattere del sistema

- Per controllare il carattere del sistema, nella cella C19, digitiamo la formula:

= SE(E12 = 0; SE(J12 = 0; "indeterminato"; "impossibile"); "determinato")

La soluzione del sistema

- Per trovare la soluzione del sistema, digitiamo nelle celle indicate le formule ricavate dal metodo di Cramer.

Per la *x* in C22 digitiamo:	Per la *y* in C23 digitiamo:	Per la *z* in C24 digitiamo:
= SE(E12 = 0; " "; J12/E12)	= SE(E12 = 0; " "; E16/E12)	= SE(E12 = 0; " "; J16/E12)

Le soluzioni nei casi richiesti

- Immettiamo 2, il primo valore richiesto di *k*, e leggiamo la soluzione nel foglio.
- Con i valori 1 e 4 troviamo rispettivamente il sistema indeterminato e impossibile.

Una verifica

- Operiamo una verifica svolgendo il prodotto fra la matrice dei coefficienti e il vettore (matrice) della soluzione per vedere se otteniamo il vettore (la matrice) dei termini noti: selezioniamo la zona G22:G24, digitiamo MATR.PRODOTTO(A11:C13; C22:C24) e battiamo contemporaneamente i tasti CTRL, MAIUSC e INVIO.

Esercitazioni

Con l'aiuto del computer discuti le soluzioni dei seguenti sistemi lineari in relazione ai valori che può assumere il parametro reale in essi contenuto.
Risolvi il sistema dopo aver sostituito ai parametri i valori indicati a fianco.

1 $\begin{cases} kx - hy = 27 \\ (k-h)x - 4y = 36 \end{cases}$, 5 e 25, -3 e -3, 3 e 2, 3 e -9. [imp., $(-18; -9)$, $(0; -9)$, ind.]

2 $\begin{cases} (k^2-1)x - 3y = k \\ 3kx + 6y = h \end{cases}$, 4 e -2, 3 e -2, 2 e 1, 0 e 0. [ind., imp., $(1{,}33; -0{,}33)$, $(0; 0)$]

3 $\begin{cases} k^2x + (k^2-k)y - 5z = h \\ x - y + z = 4 \\ x + y - 2z = 3 \end{cases}$, 8 e 1, 7 e -1, 10 e 2, $\frac{65}{16}$ e $-\frac{5}{4}$. [$(3; -2; -1)$, $(2; -5; -3)$, imp., ind.]

4 $\begin{cases} k^2x + y + kz = 1 - k^2 \\ (k-2)x - y + z = 3 \\ x + y - 2z = -2 \end{cases}$, $0, -3, -\frac{3}{2}, 1$. [$(-1{,}67; 1; 0{,}67)$, $(-0{,}58; 1{,}25; 1{,}33)$, imp., imp.]

5 $\begin{cases} x + ky + 7z + kt = -10 \\ x - (k+1)y + z + 2t = 6 \\ x - y + 2z - t = -1 \\ x - ky + 5z + 4t = 8 \end{cases}$, $-3, 0, , -2, \frac{1}{4}$. [$(3; -2; -1; 4)$; $(81; 58; -13; -2;)$ imp., imp.]

6 $\begin{cases} x + y + z + t = -2 \\ kx - 3y + 4z - t = 12 \\ 3x + 6y + t = -13 \\ x + 4y - 3z - 2t = -8 \end{cases}$, $-10, 1, 10, 12$. [$(1; -2; 3; -4)$, $(2; -3; 0; -1)$, $(11; -12; -27; 26)$, imp.]

7 $h = \sqrt{k+7} - 3$ e $\begin{cases} kx - 2y = h \\ 8x - ky = 2 - k \end{cases}$. Prova con $k = -8, -6, -4, -3$.
[non ha significato, $(-0{,}2; 1{,}6)$, imp., $(1; -1)$]

8 $h = \ln(10 - k^2) + 2$ e $\begin{cases} hx + ky = 3 \\ x - (k-1)y = -4 \end{cases}$. Prova con $k = -3, 0, 3, 4$.
[$(0; -1)$, $(0{,}7; -4{,}7)$, $(-0{,}86; 1{,}57)$, non ha significato]

9 $h = \operatorname{arcsen} k + 2$ (h in radianti) e $\begin{cases} 2kx + 2hy = \pi - 2 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$. Prova con $k = -1, 0, 1, 2$.
[$(-0{,}65; -0{,}18)$, $(-1{,}57; 0{,}29)$, $(-3; 1)$, non ha significato]

10 Dato il sistema lineare omogeneo $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 0 \\ 3x - ky + 2z = 0 \\ 2x - 3y + (k-1)z = 0 \end{cases}$, costruisci un foglio elettronico che chieda in ingresso il valore del parametro k e determini se il sistema è determinato o indeterminato. Nel secondo caso il foglio chieda il valore di z e dia l'eventuale soluzione del sistema in x e in y.
Prova il foglio con $k = 2, 6$ ($z = 9$) e $\frac{9}{2}$ ($z = 1$).
[det.; ind. ($x = -72$ e $y = -33$); indet. (imp.)]

11 Dato il sistema lineare a tre equazioni e due incognite $\begin{cases} ax + by = c \\ 3x - 2y = 50 \\ 2x + ky = 38 \end{cases}$, costruisci un foglio elettronico che richieda in ingresso il valore dei coefficienti a, b e c, determini il valore del parametro k, in modo tale che il sistema ammetta una sola soluzione, e mostri tale soluzione.
Prova il foglio con $a = 1$, $b = 4$ e $c = 12$. [$k = -6$ e $(16; -1)$]

12 Dato il sistema lineare a due equazioni e tre incognite $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ 3x - 2y + 3z = 120 \end{cases}$, costruisci un foglio elettronico che, dopo aver ricevuto in ingresso il valore dei coefficienti a, b, c e d, permetta di assegnare un valore o a x o a y o a z e ottenere la corrispondente soluzione del sistema.
Prova il foglio con $a = 1$, $b = 4$, $c = -3$, $d = -102$ e $z = 18$. [$(12; -15; 18)$]