

# LABORATORIO DI MATEMATICA

## LE FUNZIONI E LE LORO PROPRIETÀ

### ESERCITAZIONE GUIDATA

Data la famiglia di funzioni

$$g(x) = \frac{\sqrt{x^2 + px + q}}{ax + b}, \quad \text{con } a \neq 0,$$

scriviamo un programma nel linguaggio di Derive che, dopo aver letto un valore per ognuno dei parametri, indichi il dominio della funzione corrispondente.

Proviamo il programma supponendo  $p = -3$ ,  $q = 2$ ,  $a = 2$ ,  $b = -6$  e tracciamo per verifica il grafico della funzione ottenuta.

#### L'analisi del problema

Per ottenere il dominio della funzione dobbiamo porre maggiore o uguale a 0 il radicando della radice posta al numeratore e diverso da 0 il denominatore.

#### L'algoritmo risolvete

Scriviamo l'algoritmo risolvete.

```

Inizio
Leggi p, q, a, b
Controlla il coefficiente a
Crea la matrice uscita con riga 1:  g(x) = sqrt(x^2 + p*x + q)/(a*x + b)
Calcola x_d = -b/a
Calcola Δ = p^2 - 4q
Se Δ > 0,
  allora
    Calcola x_1 = (-p - sqrt(Δ))/2 e x_2 = (-p + sqrt(Δ))/2
    Se (x_d ≤ x_1 o x_d ≥ x_2)
      allora
        Inserisci la riga 2 nella matrice uscita:  D: (x ≤ x_1 o x ≥ x_2) e x ≠ x_d
      altrimenti
        Inserisci la riga 2 nella matrice uscita:  D: x ≤ x_1 o x ≥ x_2
    altrimenti
      Inserisci la riga 2 nella matrice uscita:  D: x ≠ x_d
Scrivi la matrice uscita
Fine
  
```

#### Il programma nel linguaggio di Derive

- Scegliamo *Parola* nel campo *Nome delle variabili* di *Opzioni\_Modalità Input*.
- Traduciamo l'algoritmo nel linguaggio di Derive, scrivendolo sulla riga di editazione delle espressioni.

```

Funz_01(p, q, a, b): = Prog(If(a = 0, RETURN "Il coefficiente a deve essere diverso da zero",
uscita : = [{"g(x) = ", SQRT(x^2 + p * x + q)/(a * x + b)], x_d : = - b/a, Δ : = p^2 - 4 * q, If(Δ > 0, Prog(x1
: = (-p - SQRT(Δ))/2, x2 : = (-p + SQRT(Δ))/2, If (x_d ≤ x1 ∨ x_d ≥ x2, uscita : = INSERT(["D:",
(x ≤ x1 ∨ x ≥ x2) ∧ x ≠ x_d], uscita, 2), uscita : = INSERT(["D:", x ≤ x1 ∨ x ≥ x2], uscita, 2))),
uscita : = INSERT(["D:", x ≠ x_d], uscita, 2)), RETURN uscita)
  
```



Con INVIO lo inseriamo nell'etichetta #1 della zona algebrica (figura 1).

```

Funz_01(p, q, a, b) :=
  Prog
  IF a = 0
    RETURN "Il coefficiente a deve essere diverso da zero"
  uscita := [{"g(x)=", √(x^2 + p·x + q)/(a·x + b)}]
  xd := -b/a
  Δ := p^2 - 4·q
  IF Δ > 0
#1:   Prog
      x1 := (-p - √Δ)/2
      x2 := (-p + √Δ)/2
      IF xd ≤ x1 ∨ xd ≥ x2
        uscita := INSERT(["D:", (x ≤ x1 ∨ x ≥ x2) ∧ x ≠ xd], uscita, 2)
        uscita := INSERT(["D:", x ≤ x1 ∨ x ≥ x2], uscita, 2)
      uscita := INSERT(["D:", x ≠ xd], uscita, 2)
  RETURN uscita
  
```

▲ Figura 1 Il programma nel linguaggio di Derive.

### Un'esecuzione del programma

- Immettiamo nell'etichetta #2 il nome che abbiamo assegnato al programma seguito dai valori richiesti dal problema (figura 2).
- Su di essa diamo il comando *Semplifica\_Base*, ottenendo l'output del programma nell'etichetta #3.

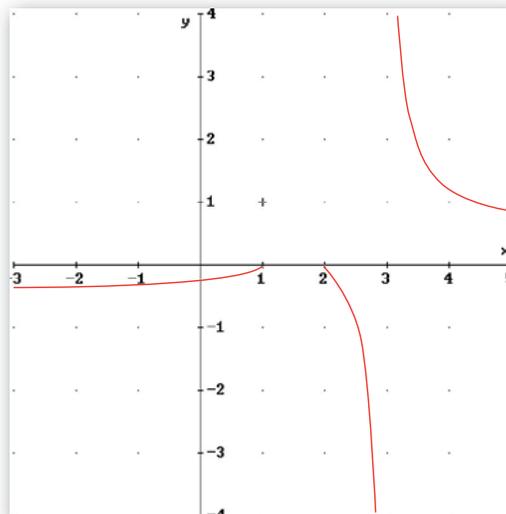
#2: Funz\_01(-3, 2, 2, -6)

#3: 
$$\left[ \begin{array}{l} g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{2 \cdot (x - 3)} \\ D: \quad x \neq 3 \wedge (x \leq 1 \vee x \geq 2) \end{array} \right]$$

▲ Figura 2 L'esecuzione del programma.

### Il grafico della funzione

- Evidenziamo l'espressione della funzione con un clic sull'etichetta #3 e poi un altro sulla prima riga della matrice e infine un clic sull'espressione. Entriamo in ambiente grafico con *Finestra\_Grafica 2D*, dove con *Traccia il grafico* realizziamo il grafico della funzione (figura 3).
- Dal grafico ricaviamo una conferma che la funzione non è definita per  $1 < x < 2$  e per  $x = 3$ .



► Figura 3 Il grafico della funzione.

## Esercitazioni

Con l'aiuto del computer determina il dominio, la positività e le eventuali intersezioni con gli assi cartesiani delle seguenti funzioni. Con gli strumenti grafici del tuo applicativo informatico traccia l'andamento delle funzioni ed evidenzia le intersezioni trovate.

**1**  $f(x) = \frac{1}{\ln(x+2)}$

**2**  $g(x) = \sqrt{\frac{x+4}{1-x}}$

Per ognuna delle seguenti famiglie di funzioni scrivi un programma nel linguaggio di Derive che, dopo aver letto il valore dei parametri in essa contenuti, indichi il dominio e le eventuali intersezioni con gli assi cartesiani della funzione ottenuta.

$$3 \quad f(x) = \frac{\sqrt{x-k}}{ax+b}, \quad \text{con } a \neq 0.$$

$$6 \quad f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x^2-k}, \quad \text{con } a \neq 0.$$

$$4 \quad f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{ax^2+4}}, \quad \text{con } a \neq 0.$$

$$7 \quad f(x) = \frac{\sqrt{ax+b}}{x-x^2}, \quad \text{con } a \neq 0.$$

$$5 \quad f(x) = \ln \frac{x-k}{ax-4}, \quad \text{con } a \neq 0.$$

$$8 \quad f(x) = \frac{ax+b}{\sqrt{x^2-3x-4}}, \quad \text{con } a \neq 0.$$

Con lo strumento informatico a tua disposizione applica alle seguenti funzioni elementari le trasformazioni indicate. Traccia poi il grafico della funzione e della sua trasformata nel medesimo riferimento cartesiano. Evidenzia nei grafici i punti le cui ascisse sono segnate a fianco e i loro corrispondenti secondo la trasformazione applicata.

$$9 \quad f(x) = \frac{x^2-4}{2} \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 3; \quad \text{traslazione di un vettore } \vec{v}(3; 2).$$

$$10 \quad f(x) = \frac{-4}{x^2} \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 3; \quad \text{traslazione di un vettore } \vec{v}(-1; 0).$$

$$11 \quad f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = \frac{3}{4}; \quad \text{simmetria rispetto all'asse } x.$$

$$12 \quad f(x) = \frac{2-e^x}{4} \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1; \quad \text{simmetria rispetto all'asse } y.$$

$$13 \quad f(x) = \ln\left(\frac{3-e^x}{2}\right) \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1; \quad \text{simmetria rispetto all'origine.}$$

Per ognuna delle seguenti funzioni realizza con lo strumento informatico a tua disposizione un grafico dove compaiano l'andamento di  $f(x)$ , di  $|f(x)|$  e di  $f(|x|)$ .

$$14 \quad f(x) = \frac{x^2-x-6}{4}$$

$$15 \quad f(x) = 4 - \sqrt{1+x^2}$$

$$16 \quad f(x) = \frac{2x-6}{1-x}$$

In un riferimento cartesiano monometrico con lo strumento informatico a tua disposizione traccia i grafici delle seguenti funzioni goniometriche nei domini indicati e delle rispettive funzioni inverse. Segna i punti di ascissa  $\frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{\pi}{3}$  ed evidenzia i punti corrispondenti nei grafici delle funzioni inverse.

$$17 \quad f(x) = \sin x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$18 \quad f(x) = \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

$$19 \quad f(x) = \operatorname{tg} x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Per ognuna delle seguenti funzioni  $f$  ricava la funzione inversa  $f^{-1}$  operando opportune restrizioni del dominio della  $f$ . Costruisci un grafico in un riferimento monometrico dove appaiano gli andamenti della  $f$ , della  $f^{-1}$  e della retta  $r$ , bisettrice del primo quadrante. Determina le coordinate di tre punti del grafico di  $f$  e congiungili con i simmetrici rispetto a  $r$ , appartenenti al grafico della  $f^{-1}$ .

$$20 \quad f: x \rightarrow \frac{x+1}{x-1}$$

$$21 \quad f: x \rightarrow x^2$$

$$22 \quad f: x \rightarrow 2x^3 - 2$$

$$23 \quad f: x \rightarrow \frac{1}{x-1}$$

Per ognuna delle seguenti funzioni, dall'andamento di  $f(x)$  studia quello di  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ ,  $l(x) = \ln[f(x)]$ ,  $s(x) = e^{f(x)}$ ,  $q(x) = f(x)^2$ ,  $r(x) = \sqrt{f(x)}$  e  $c(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ .

**24**  $f(x) = x - 2$

**25**  $f(x) = 4x - x^2$

**26**  $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$

Con l'aiuto del computer determina il dominio, la positività e le eventuali intersezioni con gli assi cartesiani delle funzioni  $f$  e  $g$  e delle funzioni composte  $f \circ g$  e  $g \circ f$ . Con gli strumenti grafici del tuo applicativo informatico traccia poi in un riferimento cartesiano il grafico delle funzioni  $f$  e  $g$  e della funzione composta  $f \circ g$  e in un altro quello della  $f$  e della  $g$  e della funzione composta  $g \circ f$ . In entrambi i grafici evidenzia le intersezioni trovate.

**27**  $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$ ,  $g(x) = \frac{x+3}{x^2-1}$ .

**28**  $f(x) = \sqrt{x+5}$ ,  $g(x) = x^2 - 4$ .

**29**  $f(x) = |x^3 - 4x|$ ,  $g(x) = \frac{x^2-1}{x}$ .

**30**  $f(x) = (x-1)^3$ ,  $g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ .

**31**  $f(x) = \ln(x^2 - x - 2)$ ,  $g(x) = e^x$ .

**32**  $f(x) = \sin x$ ,  $g(x) = x^2$ .

**33**  $f(x) = \cos x$ ,  $g(x) = \ln(1+x)$ .

**34**  $f(x) = \operatorname{tg} x$ ,  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ .

**35**  $f(x) = \sin x$ ,  $g(x) = 1 - \frac{3}{2x-1}$ .

**36**  $f(x) = \frac{1}{x-2} + 2$ ,  $g(x) = \sqrt{x+2}$ .

**37**  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ -x+2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ ,  $g(x) = \ln x$ .

Con lo strumento informatico a tua disposizione stabilisci se le seguenti funzioni sono pari o dispari. Traccia il loro grafico. Se sono pari, segna tre punti e i loro simmetrici rispetto all'asse  $y$ . Se sono dispari, segna tre punti e i loro simmetrici rispetto all'origine. Se non sono pari oppure dispari, trova ed evidenzia un punto i cui simmetrici rispetto all'asse  $y$  e all'origine non appartengono al grafico della funzione.

**38**  $f(x) = \frac{x^4 - 10x^2 + 9}{9}$

**42**  $f(x) = (x^3 - x) \sin x$

**39**  $f(x) = 4 + \sqrt{1+x^3}$

**43**  $f(x) = \frac{\ln|x|}{x^2}$

**40**  $f(x) = \frac{2x^2-2}{3} \sin x$

**44**  $f(x) = (x^2 - 1)e^{-x^2}$

**41**  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{|x|}{x^2-1}$