

LABORATORIO DI MATEMATICA

LE FUNZIONI E LE LORO PROPRIETÀ

ESERCITAZIONE GUIDATA

Data la famiglia di funzioni

$$g(x) = \frac{\sqrt{x^2 + px + q}}{ax + b}, \quad \text{con } a \neq 0,$$

scriviamo un programma nel linguaggio di Derive che, dopo aver letto un valore per ognuno dei parametri, indichi il dominio della funzione corrispondente.

Proviamo il programma supponendo $p = -3$, $q = 2$, $a = 2$, $b = -6$ e tracciamo per verifica il grafico della funzione ottenuta.

L'analisi del problema

Per ottenere il dominio della funzione dobbiamo porre maggiore o uguale a 0 il radicando della radice posta al numeratore e diverso da 0 il denominatore.

L'algoritmo risolvibile

Scriviamo l'algoritmo risolvibile.

```

Inizio
Leggi p, q, a, b
Controlla il coefficiente a
Crea la matrice uscita con riga 1:   $g(x) = \sqrt{(x^2 + p \cdot x + q) / (a \cdot x + b)}$ 
Calcola  $x_d = -b/a$ 
Calcola  $\Delta = p^2 - 4q$ 
Se  $\Delta > 0$ ,
    allora
        Calcola  $x_1 = (-p - \sqrt{\Delta})/2$  e  $x_2 = (-p + \sqrt{\Delta})/2$ 
        Se  $(x_d \leq x_1 \text{ o } x_d \geq x_2)$ 
            allora
                Inserisci la riga 2 nella matrice uscita:  D:  $(x \leq x_1 \text{ o } x \geq x_2) \text{ e } x \neq x_d$ 
            altrimenti
                Inserisci la riga 2 nella matrice uscita:  D:  $x \leq x_1 \text{ o } x \geq x_2$ 
        altrimenti
            Inserisci la riga 2 nella matrice uscita:  D:  $x \neq x_d$ 
Scrivi la matrice uscita
Fine
  
```

Il programma nel linguaggio di Derive

- Scegliamo *Parola* nel campo *Nome delle variabili di Opzioni_Modalità Input*.
- Traduciamo l'algoritmo nel linguaggio di Derive, scrivendolo sulla riga di editazione delle espressioni.

```

Funz_01(p, q, a, b): = Prog(If(a = 0, RETURN "Il coefficiente a deve essere diverso da zero",
uscita : = [{"g(x) =", SQRT(x^2 + p * x + q)/(a * x + b)], xd : = -b/a, Δ : = p^2 - 4 * q, If(Δ > 0, Prog(x1
: = (-p - SQRT(Δ))/2, x2 : = (-p + SQRT(Δ))/2, If (xd ≤ x1 ∨ xd ≥ x2, uscita : = INSERT(["D:",
(x ≤ x1 ∨ x ≥ x2) ∧ x ≠ xd], uscita, 2), uscita : = INSERT(["D:", x ≤ x1 ∨ x ≥ x2], uscita, 2))),
uscita : = INSERT(["D:", x ≠ xd], uscita, 2)), RETURN uscita)
  
```



Con INVIO lo inseriamo nell'etichetta #1 della zona algebrica (figura 1).

```

Funz_01(p, q, a, b) :=
  Prog
  If a = 0
    RETURN "Il coefficiente a deve essere diverso da zero"
  uscita := [{"g(x)=", √(x^2 + p·x + q)/(a·x + b)}]
  xd := -b/a
  Δ := p^2 - 4·q
  If Δ > 0
#1:   Prog
      x1 := (-p - √Δ)/2
      x2 := (-p + √Δ)/2
      If xd ≤ x1 v xd ≥ x2
        uscita := INSERT(["D:", (x ≤ x1 v x ≥ x2) ∧ x ≠ xd], uscita, 2)
        uscita := INSERT(["D:", x ≤ x1 v x ≥ x2], uscita, 2)
      uscita := INSERT(["D:", x ≠ xd], uscita, 2)
  RETURN uscita
  
```

▲ Figura 1 Il programma nel linguaggio di Derive.

Un'esecuzione del programma

- Immettiamo nell'etichetta #2 il nome che abbiamo assegnato al programma seguito dai valori richiesti dal problema (figura 2).
- Su di essa diamo il comando *Semplifica_Base*, ottenendo l'output del programma nell'etichetta #3.

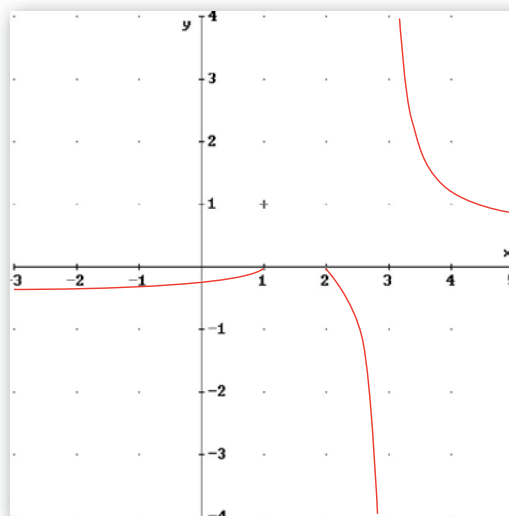
```

#2: Funz_01(-3, 2, 2, -6)
#3: [
      g(x) =  $\frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{2 \cdot (x - 3)}$ 
      D:    x ≠ 3 ∧ (x ≤ 1 v x ≥ 2)
    ]
  
```

▲ Figura 2 L'esecuzione del programma.

Il grafico della funzione

- Evidenziamo l'espressione della funzione con un clic sull'etichetta #3 e poi un altro sulla prima riga della matrice e infine un clic sull'espressione. Entriamo in ambiente grafico con *Finestra_Grafica 2D*, dove con *Traccia il grafico* realizziamo il grafico della funzione (figura 3).
- Dal grafico ricaviamo una conferma che la funzione non è definita per $1 < x < 2$ e per $x = 3$.



► Figura 3 Il grafico della funzione.

Esercitazioni

Con l'aiuto del computer determina il dominio, la positività e le eventuali intersezioni con gli assi cartesiani delle seguenti funzioni. Con gli strumenti grafici del tuo applicativo informatico traccia l'andamento delle funzioni ed evidenzia le intersezioni trovate.

1 $f(x) = \frac{1}{\ln(x+2)}$

2 $g(x) = \sqrt{\frac{x+4}{1-x}}$

Per ognuna delle seguenti famiglie di funzioni scrivi un programma nel linguaggio di Derive che, dopo aver letto il valore dei parametri in essa contenuti, indichi il dominio e le eventuali intersezioni con gli assi cartesiani della funzione ottenuta.

3 $f(x) = \frac{\sqrt{x-k}}{ax+b}$, con $a \neq 0$.

6 $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x^2-k}$, con $a \neq 0$.

4 $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{ax^2+4}}$, con $a \neq 0$.

7 $f(x) = \frac{\sqrt{ax+b}}{x-x^2}$, con $a \neq 0$.

5 $f(x) = \ln \frac{x-k}{ax-4}$, con $a \neq 0$.

8 $f(x) = \frac{ax+b}{\sqrt{x^2-3x-4}}$, con $a \neq 0$.

Con lo strumento informatico a tua disposizione applica alle seguenti funzioni elementari le trasformazioni indicate. Traccia poi il grafico della funzione e della sua trasformata nel medesimo riferimento cartesiano. Evidenzia nei grafici i punti le cui ascisse sono segnate a fianco e i loro corrispondenti secondo la trasformazione applicata.

9 $f(x) = \frac{x^2-4}{2}$ $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$; traslazione di un vettore $\vec{v}(3; 2)$.

10 $f(x) = \frac{-4}{x^2}$ $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$; traslazione di un vettore $\vec{v}(-1; 0)$.

11 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{3}{4}$; simmetria rispetto all'asse x .

12 $f(x) = \frac{2-e^x}{4}$ $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$; simmetria rispetto all'asse y .

13 $f(x) = \ln\left(\frac{3-e^x}{2}\right)$ $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$; simmetria rispetto all'origine.

Per ognuna delle seguenti funzioni realizza con lo strumento informatico a tua disposizione un grafico dove compaiano l'andamento di $f(x)$, di $|f(x)|$ e di $f(|x|)$.

14 $f(x) = \frac{x^2-x-6}{4}$

15 $f(x) = 4 - \sqrt{1+x^2}$

16 $f(x) = \frac{2x-6}{1-x}$

In un riferimento cartesiano monometrico con lo strumento informatico a tua disposizione traccia i grafici delle seguenti funzioni goniometriche nei domini indicati e delle rispettive funzioni inverse. Segna i punti di ascissa $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ ed evidenzia i punti corrispondenti nei grafici delle funzioni inverse.

17 $f(x) = \sin x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

18 $f(x) = \cos x, 0 \leq x \leq \pi$.

19 $f(x) = \tan x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

Per ognuna delle seguenti funzioni f ricava la funzione inversa f^{-1} operando opportune restrizioni del dominio della f . Costruisci un grafico in un riferimento monometrico dove appaiano gli andamenti della f , della f^{-1} e della retta r , bisettrice del primo quadrante. Determina le coordinate di tre punti del grafico di f e congiungili con i simmetrici rispetto a r , appartenenti al grafico della f^{-1} .

20 $f: x \rightarrow \frac{x+1}{x-1}$

21 $f: x \rightarrow x^2$

22 $f: x \rightarrow 2x^3 - 2$

23 $f: x \rightarrow \frac{1}{x-1}$

Per ognuna delle seguenti funzioni, dall'andamento di $f(x)$ studia quello di $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, $l(x) = \ln[f(x)]$, $s(x) = e^{f(x)}$, $q(x) = f(x)^2$, $r(x) = \sqrt{f(x)}$ e $c(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

24 $f(x) = x - 2$

25 $f(x) = 4x - x^2$

26 $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$

Con l'aiuto del computer determina il dominio, la positività e le eventuali intersezioni con gli assi cartesiani delle funzioni f e g e delle funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$. Con gli strumenti grafici del tuo applicativo informatico traccia poi in un riferimento cartesiano il grafico delle funzioni f e g e della funzione composta $f \circ g$ e in un altro quello della f e della g e della funzione composta $g \circ f$. In entrambi i grafici evidenzia le intersezioni trovate.

27 $f(x) = \frac{1}{2}x - 2, \quad g(x) = \frac{x+3}{x^2-1}.$

28 $f(x) = \sqrt{x+5}, \quad g(x) = x^2 - 4.$

29 $f(x) = |x^3 - 4x|, \quad g(x) = \frac{x^2-1}{x}.$

30 $f(x) = (x-1)^3, \quad g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}.$

31 $f(x) = \ln(x^2 - x - 2), \quad g(x) = e^x.$

32 $f(x) = \sin x, \quad g(x) = x^2.$

33 $f(x) = \cos x, \quad g(x) = \ln(1+x).$

34 $f(x) = \operatorname{tg} x, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$

35 $f(x) = \sin x, \quad g(x) = 1 - \frac{3}{2x-1}.$

36 $f(x) = \frac{1}{x-2} + 2, \quad g(x) = \sqrt{x+2}.$

37 $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ -x+2 & \text{se } x > 1 \end{cases}, \quad g(x) = \ln x.$

Con lo strumento informatico a tua disposizione stabilisci se le seguenti funzioni sono pari o dispari. Traccia il loro grafico. Se sono pari, segna tre punti e i loro simmetrici rispetto all'asse y . Se sono dispari, segna tre punti e i loro simmetrici rispetto all'origine. Se non sono pari oppure dispari, trova ed evidenzia un punto i cui simmetrici rispetto all'asse y e all'origine non appartengono al grafico della funzione.

38 $f(x) = \frac{x^4 - 10x^2 + 9}{9}$

42 $f(x) = (x^3 - x) \sin x$

39 $f(x) = 4 + \sqrt{1+x^3}$

43 $f(x) = \frac{\ln|x|}{x^2}$

40 $f(x) = \frac{2x^2-2}{3} \sin x$

44 $f(x) = (x^2 - 1)e^{-x^2}$

41 $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{|x|}{x^2-1}$