LABORATORIO DI MATEMATICA
I LIMITI DELLE FUNZIONI

ESERCITAZIONE GUIDATA

Data la famiglia di funzioni

$$f(x) = \frac{px+q}{ax^2+bx+c}, \qquad \text{con } a \neq 0,$$

costruiamo un foglio elettronico che, dopo aver ricevuto i valori dei parametri, stabilisca il dominio della funzione corrispondente e permetta di ottenere delle tabelle di valori in prossimità degli estremi del dominio.
Proviamo il foglio supponendo $p = 3, q = -6, a = 1, b = -5, c = 6$.

L'analisi del problema

Le funzioni da esaminare sono razionali fratte. Il loro dominio è dato dai valori reali della x che non annullano il denominatore. Nel problema il denominatore è un trinomio di secondo grado, di cui calcoliamo il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ e le eventuali radici x_1, x_2. Distinguiamo quindi tre casi:
- se $\Delta > 0$, il dominio è $\mathbb{R} - \{x_1, x_2\}$;
- se $\Delta = 0$, il dominio è $\mathbb{R} - \{x_1 \equiv x_2\}$;
- se $\Delta < 0$, il dominio è $\mathbb{R}$.

La zona del foglio per il dominio

- Entriamo in ambiente Excel, scriviamo le didascalie necessarie per indicare dove inserire i dati e leggere i risultati e mettiamo dei bordi alle celle che devono contenere i valori dei coefficienti della funzione.
- Inseriamo poi le formule in relazione all'analisi svolta e alle celle che contengono i coefficienti della funzione.
- Per controllare il coefficiente a, scriviamo = SE(C5 = 0; "deve essere diverso da 0."; "è diverso da 0.") in D7.
- Calcoliamo il discriminante, inserendo la formula = E5^2 − 4*C5*G5 in H7.
- Per selezionare i vari casi del dominio, scriviamo = SE(H7 < 0; ""; "−") in D9, = SE(H7 < 0; ""; "{") in E9, = SE(H7 < 0; ""; (− E5 − RADQ(H7)) / (2*C5)) in F9, = SE(H7 > 0; "e"; "") in G9, = SE(H7 > 0; (− E5 + RADQ(H7)) / (2*C5); "") in H9 e = SE(H7 < 0; ""; "}") in I9.
- Immettiamo i valori dei coefficienti 3, −6, 1, −5, 6 rispettivamente nelle celle D3, F3, C5, E5, G5 e vediamo la zona del foglio di figura 1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	I limiti con Excel								
2									
3				3	* x +	-6			
4		f(x) =	--						
5			1	*x^2 +	-5	*x +	6		
6									
7		Il coefficiente a		è diverso da 0.		Il discriminante vale		1	
8									
9	Il dominio è		R	-	{	2	e	3	}

▲ **Figura 1** La zona del foglio con il dominio della funzione.

Le tabelle per due casi di limite

- Costruiamo due tabelle per osservare l'andamento della funzione in prossimità dei punti dove non è definita. La prima tabella serve per il caso del limite finito di una funzione e la seconda per il caso del limite infinito, entrambi per x tendente a un valore finito x_0.

- Per rappresentare dei valori di x in un intorno destro e in un intorno sinistro di x_0 con i corrispondenti valori di $f(x)$, dimensioniamo ognuna delle due tabelle con quattro colonne.
- Fissiamo in 6 il numero delle cifre decimali dei numeri che compaiono nelle colonne A, B, C, D della prima tabella e nelle colonne F e H della seconda, dovendo rappresentare dei valori che si avvicinano a un limite finito.
- Imponiamo al sistema di inserire il punto separatore delle migliaia nei numeri delle colonne G e I della seconda tabella, dovendo rappresentare dei valori che aumentano notevolmente.
- In tutti i casi, con *Formato_Colonna Larghezza*, allarghiamo le colonne delle tabelle, portando la larghezza a 10.

Le formule per le tabelle

- Costruiamo le intestazioni delle tabelle e mettiamo dei bordi alle celle in cui dobbiamo immettere il valore x_0 a cui tende x e il raggio di un intorno I di x_0.
- Costruiamo la prima tabella immettendo le formule per ottenere dieci valori della x a sinistra di x_0 e dieci valori a destra, tutti appartenenti a I, e le formule per calcolare i corrispondenti valori di $f(x)$. Scriviamo = B14 − D14 in A17, = A17 + $D$14/10 in A18 e la copiamo sino alla cella A26, = ($D$3 *A17 + $F$3)/($C$5*A17^2 + $E$5*A17 + $G$5) in B17 e la copiamo sino alla cella B26, = B14 + D14 in C17, = C17 − $D$14/10 in C18 e la copiamo sino alla cella C26, = ($D$3*C17 + $F$3) / ($C$5*C17^2 + $E$5*C17 + $G$5) in D17 e la copiamo sino alla cella D26.
- Operiamo in modo analogo per l'altra tabella.

I dati per caricare le tabelle

- Carichiamo la prima tabella digitando 2, come valore a cui deve tendere x (uno dei valori trovati da Excel nello stabilire il dominio), in B14.
- Scegliamo poi 0,002 come raggio di un intorno di 2, scrivendolo in D14. Possiamo immettere anche un valore più piccolo e affinare l'avvicinamento di x a 2 e di conseguenza di $f(x)$ al suo limite.
- Carichiamo la seconda tabella digitando 3, come valore a cui deve tendere x, in G14 e 0,00005, come raggio dell'intorno di 3, in I14. Otteniamo così il foglio di figura 2.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
10									
11	Le tabelle per x tendente a un valore finito								
12									
13	La tabella con f(x) tendente a un valore finito					La tabella con f(x) tendente all'infinito			
14	x -->	2	Il raggio di *I*	0,002000		x -->	3	Il raggio di *I*	0,000050
15	Il limite da sinistra		Il limite da destra			Il limite da sinistra		Il limite da destra	
16	x	f(x)	x	f(x)		x	f(x)	x	f(x)
17	1,998000	-2,994012	2,002000	-3,006012		2,999950	-60.000	3,000050	60.000
18	1,998200	-2,994610	2,001800	-3,005410		2,999955	-66.667	3,000045	66.667
19	1,998400	-2,995208	2,001600	-3,004808		2,999960	-75.000	3,000040	75.000
20	1,998600	-2,995806	2,001400	-3,004206		2,999965	-85.714	3,000035	85.714
21	1,998800	-2,996404	2,001200	-3,003604		2,999970	-100.000	3,000030	100.000
22	1,999000	-2,997003	2,001000	-3,003003		2,999975	-120.000	3,000025	120.000
23	1,999200	-2,997602	2,000800	-3,002402		2,999980	-150.000	3,000020	150.000
24	1,999400	-2,998201	2,000600	-3,001801		2,999985	-200.000	3,000015	200.000
25	1,999600	-2,998800	2,000400	-3,001200		2,999990	-300.000	3,000010	300.000
26	1,999800	-2,999400	2,000200	-3,000600		2,999995	-600.000	3,000005	600.000

▲ **Figura 2** **Il foglio con le tabelle che illustrano due (delle quattro) definizioni di limite.**

Alcune osservazioni

- Dalla prima tabella notiamo che $f(x)$ si avvicina a -3, dalla seconda che $f(x)$ sembra crescere in valore assoluto illimitatamente, quindi tendere all'infinito. Le due tendenze possono essere confermate calcolando i due limiti.
- Se usiamo una tabella per un limite per il quale non è stata costruita, compaiono i simboli #####, i quali indicano che le celle non sono sufficientemente dimensionate. Per esempio, se usiamo la prima tabella per il limite infinito, i simboli ##### appaiono nelle colonne B e D.
- Se desideriamo poi ampliare la nostra ricerca numerica, possiamo preparare colonne più larghe e valori con un numero maggiore di cifre decimali. Le uniche limitazioni consistono nella capacità di memoria del calcolatore e nel tempo che esso impiega a svolgere i calcoli.

Esercitazioni

Per ognuna delle seguenti famiglie di funzioni costruisci un foglio elettronico che:

a) riceva un valore per ognuno dei parametri in essa contenuti;
b) determini il dominio della corrispondente funzione;
c) permetta di esaminare con tabelle di valori l'andamento della funzione agli estremi del dominio, sia che essi siano finiti sia che siano infiniti.

Stabilisci il numero delle cifre decimali (e quindi la larghezza delle colonne) e il tipo di numeri a seconda del caso che stai trattando.

Con un solo parametro

1 $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{kx^2 + x}$

2 $f(x) = \dfrac{kx^2 + 2x - 3}{x^2 + 1}$

3 $f(x) = \dfrac{(k^2 - 1)x^2 + kx - 4}{x - 1}$

4 $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{kx^3 - x^2}$

5 $f(x) = \dfrac{kx}{\sqrt{x^2 - 1}}$

6 $f(x) = \dfrac{|x - 1|}{kx - 4}$

7 $f(x) = e^{\frac{1}{hx - 1}}$

8 $f(x) = \ln(h - x)$

Con più parametri

9 $f(x) = \dfrac{x^2 + px + q}{ax + b}$, con $a \neq 0$.

10 $f(x) = \dfrac{x^2 + px + q}{ax^2 + bx + c}$, con $a \neq 0$.

11 $f(x) = \dfrac{1}{\ln(ax + b)}$, con $a \neq 0$.

12 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{ax^2 + bx + c}$, con $a \neq 0$.

13 $f(x) = \sqrt{\dfrac{x + k}{ax + b}}$, con $a \neq 0$.

14 $f(x) = e^{\frac{k}{ax + b}}$, con $a \neq 0$.

Con l'aiuto del computer determina il dominio, gli asintoti orizzontali e verticali e le intersezioni con gli assi cartesiani delle seguenti funzioni.
Con gli strumenti grafici del tuo applicativo informatico traccia l'andamento della $f(x)$ e dei suoi asintoti ed evidenzia le intersezioni con gli assi cartesiani.

15 $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2 + 8x + 6}}{x - 1}$

[D: $(x < -3 \vee x > -1) \wedge x \neq 1$; $x = 1$, $y = -\sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$; $(-3; 0)$, $(-1; 0)$, $(0; -\sqrt{6})$]

16 $f(x) = \dfrac{(4x-8)\ln(x^2+1)}{(x-3)\ln(x^2-8x+15)}$

$[D\colon (x<3 \wedge x \neq -\sqrt{2}+4) \vee (x>5 \wedge x \neq \sqrt{2}+4);\ x=-\sqrt{2}+4,\ x=3,\ x=\sqrt{2}+4,\ y=4,\ (0;0),\ (2;0)]$

17 $f(x) = \dfrac{24\ln^2 x}{(3\ln x-2)(4\ln x+1)}$

$[D\colon (x>0 \wedge x \neq e^{\frac{2}{3}} \wedge x \neq e^{-\frac{1}{4}};\ x=e^{\frac{2}{3}},\ x=e^{-\frac{1}{4}},\ y=2;\ (1;0)]$

18 $f(x) = \dfrac{1}{\log(x^2+11x+10)}$

$[D\colon (x<-10 \wedge x \neq -10{,}11) \vee (x>-1 \wedge x \neq -0{,}89);\ x=-10{,}11,\ x=-0{,}89,\ y=0;\ (0;1)]$

19 $f(x) = e^{\frac{x^2-1}{x^2-3x}}$

$[D\colon \mathbb{R}-\{0,3\};\ x=0 \text{ per } x \to 0^+,\ x=3 \text{ per } x \to 3^+,\ y=e]$

20 $f(x) = \sqrt{\dfrac{e^x}{e^x+1}}$

$\left[D\colon \mathbb{R};\ y=0 \text{ per } x \to -\infty,\ y=1 \text{ per } x \to +\infty;\ \left(0;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$