LABORATORIO DI MATEMATICA
LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI CON DERIVE

ESERCITAZIONE GUIDATA

Determiniamo i quattro integrali particolari dell'equazione differenziale

$$y' - \frac{1}{x} y = \frac{3}{x^3},$$

che soddisfano rispettivamente le condizioni iniziali:

$$y(1) = -2, \quad y(1) = -1, \quad y(1) = 0, \quad y(1) = 1.$$

L'equazione differenziale ha significato per $x \neq 0$.

• Tracciamo i grafici dei quattro integrali particolari trovati nel medesimo riferimento cartesiano, evidenziandovi le condizioni iniziali imposte.

• Stabiliamo il tipo e le caratteristiche principali delle soluzioni dell'equazione differenziale data, attraverso lo studio dell'integrale generale e l'osservazione dei grafici tracciati.

Gli integrali particolari

Con le versioni 5 e seguenti possiamo usare in modo immediato qualsiasi utilità o funzione utente o programma contenuti nelle cartelle di Derive, conoscendone il nome e la sintassi.

Per essere informati sulle funzioni utili per risolvere le equazioni differenziali, facciamo clic sul menu ? (*Help*), scegliamo *Guida in linea*, selezioniamo *Sommario*, entriamo in *Libreria dei file di utilità* e apriamo il capitolo *Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine*.

Troviamo scritto:

L'istruzione LINEAR1(p, q, x, y, x0, y0) restituisce una soluzione esplicita dell'equazione differenziale $y' + p(x) \cdot y = q(x)$ lineare in y e nella sua derivata con la condizione y0 = y(x0).

L'istruzione LINEAR1_GEN(p, q, x, y, c) è simile a LINEAR1, ma restituisce una soluzione generale in termini della costante simbolica c.

• Dopo aver trovato nel manuale in linea le indicazioni per risolvere le equazioni differenziali lineari del primo ordine, scriviamo nella riga di editazione delle espressioni l'utilità con i dati del nostro caso:

Linear1(–1/x, 3/x^3, x, y, 1, –2)

• Con INVIO la inseriamo nell'etichetta #1.

• Su di essa diamo *Semplifica_Base* e otteniamo il primo integrale.

• Evidenziamo la #1, battiamo F3, importando nella riga di editazione l'utilità già scritta, sostituiamo la prima condizione iniziale -2 con la seconda -1 e diamo INVIO, inserendola nella #3 della zona algebrica.

• Sull'etichetta #3 diamo *Semplifica_Base* e troviamo il secondo integrale.

• Operiamo allo stesso modo per gli altri due integrali.

#1: $\text{LINEAR1}\left(-\frac{1}{x}, \frac{3}{x^3}, x, y, 1, -2\right)$

#2: $y = -\frac{x^3 + 1}{x^2}$

#3: $\text{LINEAR1}\left(-\frac{1}{x}, \frac{3}{x^3}, x, y, 1, -1\right)$

#4: $y = -\frac{1}{x^2}$

#5: $\text{LINEAR1}\left(-\frac{1}{x}, \frac{3}{x^3}, x, y, 1, 0\right)$

#6: $y = \frac{x^3 - 1}{x^2}$

#7: $\text{LINEAR1}\left(-\frac{1}{x}, \frac{3}{x^3}, x, y, 1, 1\right)$

#8: $y = \frac{2 \cdot x^3 - 1}{x^2}$

▲ Figura 1

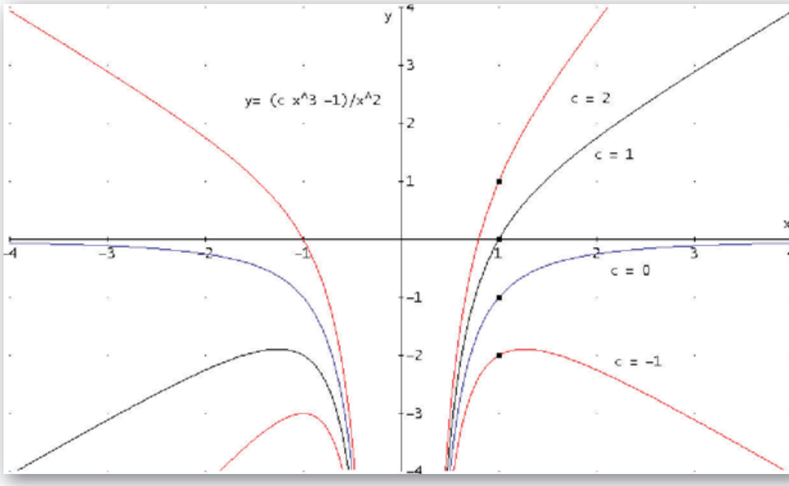
Il grafico degli integrali

$$\#9:\quad \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Scriviamo una matrice con le coordinate dei punti condizioni iniziali,

  [[1,-2], [[1,-1], [[1, 0], [[1, 1]],

e la inseriamo nella #9.
- Evidenziamo l'etichetta #1, facciamo clic sul bottone della finestra grafica 2D e, in ambiente grafico 2D, sul bottone *Traccia il grafico*, per ottenere l'andamento del primo integrale.
- Passiamo alcune volte dall'ambiente algebrico a quello grafico per gli altri grafici e per la rappresentazione dei punti relativi alle condizioni iniziali.
- Usiamo alcune volte il bottone della grafica *Inserisci_Annotazione* per scrivere le didascalie, che vediamo in figura 2.



▶ **Figura 2 I grafici dei quattro integrali particolari con le condizioni iniziali.**

Lo studio dell'integrale generale

- Scriviamo nella riga di editazione delle espressioni l'utilità per determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale data,

  Linear1_GEN(–1/x, 3/x^3, x, y, c),

e con INVIO la inseriamo nell'etichetta #10.
- Usiamo, quindi, alcuni operatori di Derive per stabilire le caratteristiche delle soluzioni dell'equazione differenziale.

Con *Semplifica_Base* otteniamo nella #11 l'integrale generale.

Con *Semplifica_Sviluppa* cambiamo nella #12 la sua forma.

Con *Calcola_Derivata*, seguito da *Risolvi Espressione*, determiniamo gli zeri della derivata. Vediamo apparire nella #16 due numeri complessi, da scartare, e uno reale $x = -\sqrt[3]{\dfrac{2}{c}}$.

$$\#10:\quad \text{LINEAR1\_GEN}\left(-\frac{1}{x}, \frac{3}{x^3}, x, y, c\right)$$

$$\#11:\quad y = \frac{c \cdot x^3 - 1}{x^2}$$

$$\#12:\quad y = c \cdot x - \frac{1}{x^2}$$

$$\#13:\quad \frac{d}{dx}\left(y = c \cdot x - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$\#14:\quad 0 = \frac{2}{x^3} + c$$

$$\#15:\quad \text{SOLVE}\left(0 = \frac{2}{x^3} + c, x\right)$$

$$\#16:\quad x = \frac{\dfrac{2^{1/3}}{2} - \dfrac{108^{1/6} \cdot i}{2}}{c^{1/3}} \vee x = \frac{\dfrac{2^{1/3}}{2} + \dfrac{108^{1/6} \cdot i}{2}}{c^{1/3}} \vee x = -\frac{2^{1/3}}{c^{1/3}}$$

▲ **Figura 3**

Deduciamo, quindi, dai risultati e dal grafico, che le soluzioni dell'equazione differenziale:
- sono funzioni razionali fratte definite in $\mathbb{R} - \{0\}$,
- ammettono l'asintoto verticale $x = 0$, l'asse y, e, escluso il caso $c = 0$ corrispondente alla $y = -\dfrac{1}{x^2}$,
- ammettono l'asintoto obliquo $y = cx$,
- intersecano l'asse x nel punto $x = \sqrt[3]{\dfrac{1}{c}}$,
- hanno un massimo relativo di ascissa $x = -\sqrt[3]{\dfrac{2}{c}}$.

Esercitazioni

Per ognuna delle seguenti equazioni differenziali con il computer:
- **determina i tre integrali particolari aventi le caratteristiche indicate;**
- **rappresentali in un grafico, dove evidenzi le condizioni imposte.**

1 $x^2y' - 2xy = 1$,

a) passante per $P(-1; 1)$;
b) avente un flesso per $x = 1$;
c) formante con l'asse x e con le rette di equazioni $x = 1$ e $x = 2$ una superficie di area $\frac{14 - 3\ln 2}{9}$.

$\left[\text{a) } y = \frac{2x^3 - 1}{3x}; \text{ b) } y = \frac{x^3 - 1}{3x}; \text{ c) } y = \frac{2x^3 - 1}{3x}\right]$

2 $y' + y = 2xe^{-x}$,

a) passante per $P(0; 1)$;
b) avente un minimo nel punto $x = -1$;
c) tangente nel punto $x = 0$ a una retta parallela alla retta di equazione $y = 4x$.

$[\text{a) } y = e^{-x}(x^2 + 1); \text{ b) } y = e^{-x}(x^2 - 3); \text{ c) } y = e^{-x}(x^2 - 4)]$

Date le seguenti equazioni differenziali del primo ordine lineari:

a) sul quaderno:
- **applica la formula risolutiva per ottenere l'integrale generale;**
- **trova gli integrali particolari che soddisfano le condizioni iniziali indicate;**

b) con il computer:
- **usa le istruzioni necessarie per ottenere gli stessi risultati;**
- **esegui la verifica (calcola la derivata dell'integrale generale, sostituisci l'integrale generale e la sua derivata nell'equazione differenziale e osserva se ottieni un'identità);**
- **traccia l'andamento degli integrali particolari dell'equazione differenziale nella stessa finestra grafica, evidenziando le condizioni iniziali imposte;**

c) rispondi ai seguenti quesiti riguardanti le funzioni integrali soluzioni dell'equazione differenziale:
- **indica di che tipo sono;**
- **scrivi le caratteristiche comuni;**
- **in funzione della costante indeterminata trova:**
  - **le coordinate delle eventuali intersezioni con gli assi cartesiani,**
  - **le equazioni degli eventuali asintoti,**
  - **le coordinate degli eventuali punti di massimo e di minimo,**
  - **le coordinate degli eventuali punti di flesso.**

3 $xy' + y = 0$, $y(1) = 4$, $y(1) = 2$, $y(1) = 1$. $\left[y = \frac{c}{x}\right]$

4 $x^2y' - xy + x - 2 = 0$, $y(1) = 0$, $y(1) = 1$, $y(1) = 2$. $\left[y = \frac{cx^2 + x + 1}{x}\right]$

5 $y' + \frac{1}{x}y - \frac{2}{x^2} = 0$, $y(1) = 0$, $y(1) = -1$, $y(1) = -2$. $\left[y = \frac{2\ln x}{x} + \frac{c}{x}\right]$

6 $y' + \frac{1}{x}y - 5x^3 = 0$, $y(1) = 1$, $y(1) = 0$, $y(1) = -1$. $\left[y = \frac{x^5 + c}{x}\right]$

7 $y' - y - 1 = 0$, $y(0) = -2$, $y(0) = -1$, $y(0) = 0$. $[y = ce^x - 1]$

8 $xy' - y + \frac{2}{x} = 0$, $y(1) = 2$, $y(1) = 1$, $y(1) = 0$. $\left[y = \frac{cx^2 + 1}{x}\right]$

Date le seguenti equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili:

a) risolvile sul quaderno;
b) usa il computer per controllare i risultati;
c) dove è possibile, esplicita la *y* e svolgi la verifica con l'integrale particolare trovato.

9 $y' = y^2$, $\quad y(-1) = \frac{1}{2}$. $\quad \left[y = \frac{1}{1-x}\right]$

10 $y' - xy^2 = 0$, $\quad y(2) = -\frac{2}{3}$. $\quad \left[y = \frac{2}{1-x^2}\right]$

11 $y' - x\sqrt{y} = 0$, $\quad y(1) = 1$. $\quad \left[y = \frac{(x^2+3)^2}{16}\right]$

12 $y' = x(x+1)$, $\quad y(0) = 0$. $\quad \left[y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]$

13 $x(x+1)y' = y$, $\quad y(1) = 1$. $\quad \left[y = \frac{2x}{x+1}\right]$

14 $(x^2 + 3x + 2)y' = y$, $\quad y(0) = 1$. $\quad \left[y = \frac{2(x+1)}{x+2}\right]$