LABORATORIO DI MATEMATICA
IL CALCOLO COMBINATORIO

Nella seguente tabella gli operandi fra parentesi tonde sono numeri o riferimenti a celle.

Per ottenere	usiamo l'operatore di Excel
le combinazioni semplici di n elementi di classe k,	COMBINAZIONE(n; k)
le combinazioni con ripetizione di n elementi di classe k,	COMBINAZIONE($n + k - 1$; k)
le disposizioni semplici di n elementi di classe k,	PERMUTAZIONE(n; k)
le disposizioni con ripetizione di n elementi di classe k,	n^k
le permutazioni semplici di n elementi,	FATTORIALE(n)
le permutazioni di n elementi di cui h, k e j ripetuti,	FATTORIALE(n)/(FATTORIALE(h)* FATTORIALE(k)*FATTORIALE(j)).

ESERCITAZIONE GUIDATA

Una scatola contiene g gettoni gialli (numerati da 1 a g) e b gettoni blu (numerati da 1 a b). Consideriamo l'estrazione di un gruppo di e gettoni.
Costruiamo un foglio che, ricevuti i numeri, g, b ed e, determini quanti gruppi differenti possiamo estrarre. Deve poi essere calcolato il numero di gruppi in relazione al numero k dei gettoni gialli in essi contenuti. Per dimensionare il foglio poniamo come limite $g \leq 10$.
Proviamo il foglio nei casi $g = 2$, $b = 3$ ed $e = 2$; $g = 5$, $b = 3$ ed $e = 6$; $g = 10$, $b = 12$ ed $e = 10$.
Per verifica, scriviamo i gruppi del primo caso.

L'analisi del problema

Chiamiamo t il numero totale dei gettoni ($t = g + b$). Per stabilire il numero delle diverse uscite possibili, calcoliamo le combinazioni semplici di t oggetti a gruppi di e.
Dobbiamo controllare che sia $g \leq 10$ ed $e \leq g + b$.
Otteniamo poi i valori accettabili di k, facendolo variare dal valore più grande fra 0 ed $e - b$ al valore più piccolo fra e e g. Per esempio, se nella scatola i gettoni gialli sono 2, quelli blu 3 e quelli estratti 2, k varia da 0 (nessun gettone estratto è giallo) a 2 (entrambi i gettoni gialli sono estratti). Se invece i gettoni gialli sono 5, quelli blu 3 e quelli estratti 6, k varia da 3 (differenza fra e e b) a 5 (perché $g < e$).
Per stabilire il numero dei gruppi distinti contenenti k gettoni, moltiplichiamo il numero delle combinazioni semplici di g oggetti a gruppi di k per il numero delle combinazioni semplici di b oggetti a gruppi di $e - k$.

La costruzione del foglio

Basandoci sull'analisi svolta costruiamo il foglio per risolvere il problema.
- Scriviamo delle didascalie e mettiamo dei bordi alle celle A5, B5, D7, per indicare dove inserire il numero dei gettoni gialli, quello dei gettoni blu e quello dei gettoni estratti (figura 1).
- Calcoliamo il totale t dei gettoni contenuti nella scatola, scrivendo la formula =A5 + B5 in D5.
- Per controllare g, digitiamo =SE(A5 > 10; "Il foglio accetta 10 come numero massimo per i gettoni di colore giallo."; "=") in A6.
- Per controllare e, scriviamo =SE(D7 > D5; "Il numero dei gettoni da estrarre supera il numero dei gettoni contenuti nella scatola"; "=") in A9.

- Determiniamo le diverse e possibili estrazioni, digitando =SE(D7 > D5; 0; COMBINAZIONE(D5; D7) in D8.
- Per avere un appoggio al controllo dei valori di k, inseriamo nella colonna A un contatore: digitiamo 0 in A12, 1 in A13 e copiamo la zona A12:A13 sino alla A22.
- Mostriamo i valori accettabili di k, scrivendo la formula =SE(O(A12 < D7 − B5; A12 > MIN(A5; D7)); "/"; A12) in C12 e copiandola sino alla C22.
- Per scrivere l'etichetta "gialli" solo dove serve, digitiamo =SE(C12 = "/"; "/"; SE(C12 = 1; "giallo"; "gialli")) in D12 e la copiamo sino alla D22.
- Calcoliamo il numero delle estrazioni che contengono k gettoni gialli, scrivendo =SE(C12 = "/"; 0; COMBINAZIONE(A5; A12)*COMBINAZIONE(B5; D7 − A12)) in E12 e copiandola sino alla E22.
- Digitiamo =SOMMA(E12:E22) in E24, in modo da verificare che la somma del numero dei gruppi che abbiamo ottenuto sia uguale al numero delle distinte estrazioni.

I dati

- Immettiamo i valori 2, 3 e 2 rispettivamente nelle celle A5, B5 e D7 e vediamo il foglio di figura 1*a*. Analogamente, otteniamo il foglio di figura 1*b* con 5, 3 e 6 e quello di figura 1*c* con 10, 12 e 10.

	A	B	C	D	E
1	Il calcolo combinatorio				
2					
3	I gettoni numerati contenuti nella scatola sono				
4	gialli	blu		in totale	
5	2	3		5	
6	=				
7	Se un'estrazione è formata da			2	gettoni,
8	le estrazioni distinte risultano			10	.
9	=				
10			I gruppi distinti		
11	Il contatore		contenenti		sono
12	0		0	gialli	3
13	1		1	giallo	6
14	2		2	gialli	1
15	3		/	/	0
16	4		/	/	0
17	5		/	/	0
18	6		/	/	0
19	7		/	/	0
20	8		/	/	0
21	9		/	/	0
22	10		/	/	0
23					
24		Il numero delle combinazioni			10

a. Il foglio corrispondente ai dati ***g*** **= 2,** ***b*** **= 3 ed** ***e*** **= 2.**

	A	B	C	D	E
1	Il calcolo combinatorio				
2					
3	I gettoni numerati contenuti nella scatola sono				
4	gialli	blu		in totale	
5	5	3		8	
6	=				
7	Se un'estrazione è formata da			6	gettoni,
8	le estrazioni distinte risultano			28	.
9	=				
10			I gruppi distinti		
11	Il contatore		contenenti		sono
12	0		/	/	0
13	1		/	/	0
14	2		/	/	0
15	3		3	gialli	10
16	4		4	gialli	15
17	5		5	gialli	3
18	6		/	/	0
19	7		/	/	0
20	8		/	/	0
21	9		/	/	0
22	10		/	/	0
23					
24		Il numero delle combinazioni			28

b. Il foglio corrispondente ai dati ***g*** **= 5,** ***b*** **= 3 ed** ***e*** **= 6.**

	A	B	C	D	E
1	Il calcolo combinatorio				
2					
3	I gettoni numerati contenuti nella scatola sono				
4	gialli	blu		in totale	
5	10	12		22	
6	=				
7	Se un'estrazione è formata da			10	gettoni,
8	le estrazioni distinte risultano			646646	.
9	=				
10			I gruppi distinti		
11	Il contatore		contenenti		sono
12	0		0	gialli	66
13	1		1	giallo	2200
14	2		2	gialli	22275
15	3		3	gialli	95040
16	4		4	gialli	194040
17	5		5	gialli	199584
18	6		6	gialli	103950
19	7		7	gialli	26400
20	8		8	gialli	2970
21	9		9	gialli	120
22	10		10	gialli	1
23					
24		Il numero delle combinazioni			646646

c. Il foglio corrispondente ai dati ***g*** **= 10,** ***b*** **= 12 ed** ***e*** **= 10.**

▲ Figura 1

Le combinazioni del primo caso

Per verifica, scriviamo le combinazioni semplici dei 5 oggetti $\{g_1, g_2, b_1, b_2, b_3\}$ in gruppi di 2:

con 0 gialli:	$[b_1, b_2]$, $[b_1, b_3]$, $[b_2, b_3]$	3
con 1 giallo:	$[g_1, b_1]$, $[g_1, b_2]$, $[g_1, b_3]$, $[g_2, b_1]$, $[g_2, b_2]$, $[g_2, b_3]$	6
con 2 gialli:	$[g_1, g_2]$	1

Esercitazioni

Costruisci i fogli che, dopo aver letto i valori di *n* e di *k*, verifichino le seguenti identità.

1 $n! = n(n-1)(n-2)(n-3)!$

2 $\dfrac{n!}{n} = (n-1)!$

3 $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

4 $\dbinom{n+1}{2} = n^2 - \dbinom{n}{2}$

Dopo aver analizzato ognuno dei seguenti problemi, costruisci un foglio che permetta l'ingresso dei dati, calcoli e mostri i risultati. Prova il foglio nei casi proposti. Sul quaderno scrivi i gruppi corrispondenti al caso *a*.

5 In una scuola ci sono tre classi quinte formate rispettivamente da a, b e c alunni. Occorre formare una rappresentanza formata da quattro alunni, di cui due della classe più numerosa. Determina quante sono le possibili quaterne che si possono formare. a) $a = 3$, $b = 2$, $c = 2$; b) $a = 28$, $b = 24$, $c = 30$; c) $a = 24$, $b = 24$, $c = 22$. [a) 12; b) 292 320; c) 145 728]

6 Hai n gettoni neri numerati da 1 a n, b gettoni bianchi numerati da 1 a b, r gettoni rossi numerati da 1 a r. Determina le possibili sestine che puoi formare con due gettoni neri, tre bianchi e uno rosso. a) $n = 2$, $b = 4$, $r = 2$; b) $n = 5$, $b = 3$, $r = 3$; c) $n = 6$, $b = 2$, $r = 4$. [a) 8; b) 30; c) 0]

7 Quanti numeri di c cifre tutte diverse puoi formare con gli elementi dell'insieme A formato da m cifre diverse e quanti di essi iniziano con la cifra r? Quanti ne puoi formare di c cifre anche ripetute e quanti di essi iniziano con la cifra r? a) $c = 2$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $r = 4$; b) $c = 3$, $A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, $r = 7$; c) $c = 4$, $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9\}$, $r = 5$. [a) 12 e 3, 16 e 4; b) 60 e 12, 125 e 25; c) 840 e 0, 2401 e 0]

8 Con una parola formata da l lettere, di cui n non ripetute, u ripetute una volta, d ripetute due volte, t ripetute tre volte, determina quanti anagrammi della parola puoi formare, anche senza significato (u, d e t possono anche valere 0). a) API; b) ARPA; c) COCCO. [a) 6; b) 12; c) 10]

9 Calcola i coefficienti dello sviluppo di $(ax + by)^n$. Assegna poi a x e a y dei valori e calcola la potenza del binomio prima e dopo lo sviluppo. a) $a = 3$, $b = -2$, $n = 3$, $x = 2$, $y = 1$; b) $a = 1$, $b = -3$, $n = 4$, $x = 1$, $y = 1$; c) $a = 1$, $b = 1$, $n = 6$, $x = 2$, $y = 1$. [a) $27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$, 64; b) $x^4 - 12x^3y + 54x^2y^2 - 108xy^3 + 81y^4$, 16; c) $x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$, 729]