LABORATORIO DI MATEMATICA
GLI SPAZI VETTORIALI

ESERCITAZIONE GUIDATA

Con Derive calcoliamo le componenti p e q dei vettori $\vec{u} = (p; -2)$ e $\vec{v} = (1; q)$ appartenenti allo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$, in modo che l'espressione $2\vec{u} + \frac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v})$ valga $\vec{r} = (-3; -2)$.

Determinati p e q, tracciamo i grafici dei vettori $2\vec{u}$, $\frac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v})$ e $\vec{r}$ nel piano cartesiano.

Le coordinate *p* e *q*

- Diamo *Crea_Espressione* e scriviamo nella riga di editazione la definizione del vettore $\vec{u}$: u : = [p, − 2] e con INVIO la immettiamo nella #1 (figura 1).
- Operiamo in modo simile per la definizione del vettore $\vec{v}$, scrivendo v : = [1, q] e immettendola nella #2.
- Scriviamo r : = [− 3, − 2], la definizione di $\vec{r}$, e la inseriamo nella #3.
- Digitiamo l'espressione 2u + 1/2*(u − v) = r e la poniamo nella #4.
- Applichiamo sulla #4 il comando *Risolvi_Espressione* e usciamo dalla corrispondente finestra di dialogo con un clic su *Risolvi*, ottenendo l'impostazione della soluzione nella #5 e la soluzione medesima nella #6.

#1: $u := [p, -2]$

#2: $v := [1, q]$

#3: $r := [-3, -2]$

#4: $2\cdot u + \dfrac{u - v}{2} = r$

#5: $\mathrm{SOLVE}\left(2\cdot u + \dfrac{u - v}{2} = r\right)$

#6: $p = -1 \wedge q = -6$

▲ Figura 1

I vettori del problema

- Scriviamo il vettore $\vec{u}$ in relazione al valore trovato di p e nella forma matriciale u : = [0, 0; − 1, − 2], che rappresenta un segmento avente un estremo nell'origine.
- Lo inseriamo, come vediamo in figura 2, nella #7.
- Scriviamo il vettore $\vec{v}$ in relazione al valore trovato di q e nella forma matriciale v : = [0, 0; 1, − 6] e lo inseriamo nella #8.
- Digitiamo l'espressione parziale 2*u e la inseriamo nella #9 (figura 3).
- Con *Semplifica_Base* otteniamo il risultato nella #10.
- Operiamo similmente per l'espressione parziale (u − v)/2 e per quella globale 2*u + (u − v)/2, ricavando i risultati nella #12 e nella #14.

#7: $u := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

#8: $v := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$

▲ Figura 2

Il grafico

- Evidenziamo la #10 ed entriamo in ambiente grafico a due dimensioni con il bottone *Finestra_Grafica 2D*.
- Diamo *Opzioni_Visualizzazione*, selezioniamo *Punti* e nel campo *Collega* scegliamo *Sì*, in modo che Derive, date le coordinate di due punti, tracci il segmento che li congiunge.
- Con *Traccia il grafico* otteniamo nel piano cartesiano il vettore $2\vec{u}$.

#9: $2\cdot u$

#10: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

#11: $\dfrac{u - v}{2}$

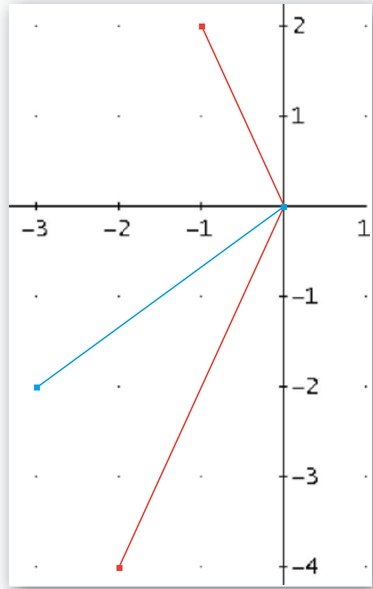
#12: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

#13: $2\cdot u + \dfrac{u - v}{2}$

#14: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

► Figura 3

- Ritorniamo nella zona algebrica, selezioniamo la #12, ripassiamo in grafica, dove tracciamo il vettore $\frac{1}{2}(\vec{u}-\vec{v})$.
- Operiamo similmente per il vettore risultato che si trova nella #14.
- Stabiliamo la zona del piano cartesiano da rappresentare sullo schermo dando *Imposta_Intervallo del grafico Minimo/massimo* e scegliendo -4, 1 e 5 come valori minimo e massimo e numero delle tacche per l'asse orizzontale e -5, 3 e 8 per l'asse verticale.
- Rendiamo monometrica la zona visualizzata del piano cartesiano con il comando *Imposta_Rapporto di aspetto Resetta*. Al termine vediamo il grafico di figura 4.



▶ **Figura 4**

Esercitazioni

I vettori $\vec{a}$ e $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ formano un angolo convesso α, i loro moduli sono $a = 5$ e $b = 8$. Il vettore $\vec{c}$ è uguale a $h\vec{a} + \vec{b}$ e forma con $\vec{a}$ l'angolo convesso β. Con Derive determina le grandezze richieste nei seguenti esercizi attraverso i dati assegnati e poi traccia il grafico dei vettori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $h\vec{a}$ e $\vec{c}$.

1 Dati l'angolo $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ e lo scalare $h = 3$, trova il modulo c e l'angolo β. [$c = 13$ e $\beta = 0,5621$]

2 Dati il modulo $c = 20$ e l'angolo $\alpha = \frac{2}{3}\pi$, calcola lo scalare h e l'angolo β.

[$h_1 = 4,55$ e $\beta_1 = 0,3537$; $h_2 = -2,95$ e $\beta_2 = -0,3537$]

3 Dati il modulo $c = 20$ e l'angolo $\beta = \frac{1}{9}\pi$, calcola lo scalare h e l'angolo α.

[$h = 2,9$ e $\alpha = 1,0256 \vee h = -2,93$ e $\alpha = 2,1159$]

Dati i vettori $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$, calcola le seguenti espressioni. Supponendo poi che ogni matrice rappresenti le coordinate nel piano cartesiano degli estremi di un vettore, traccia il grafico dei dati e dei risultati parziali e finali

4 $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ $\left[\vec{r} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right]$

5 $\vec{u} - 2\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$ $\left[\vec{r} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}\right]$

6 $3\left(\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w}\right) - \vec{u}$ $\left[\vec{r} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}\right]$

Determina r in modo che la norma dei seguenti vettori valga $\sqrt{14}$.

7 $\vec{u} = (2; -1; r)$ [$r = -3 \vee r = 3$]

8 $\vec{u} = (-2r; r; 3)$ $[r = -1 \vee r = 1]$

9 $\vec{u} = (2; r; r - 4)$ $[r = 3 \vee r = -1]$

Considera i vettori $\vec{u} = (h; -1)$, $\vec{v} = (-2; 1)$ e $\vec{w} = (-5; 5) \in \mathbb{R}^2$ e determina la componente h di $\vec{u}$ in modo che le seguenti uguaglianze siano verificate.

10 $\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\| = 5\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$ $[h = -2 \vee h = 2]$

11 $\|\vec{u} - \vec{v}\| - \frac{1}{5}\|\vec{w}\| = \sqrt{2}$ $[h = -4 \vee h = 0]$

12 Determina h in modo che i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ risultino linearmente dipendenti.

$\vec{u} = (1; 4; -1)$, $\vec{v} = (3; h; -3)$. [12]

Determina i coefficienti p e q che verificano che $\vec{w}$ sia combinazione lineare di $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

13 $\vec{u} = (-1; 1)$, $\vec{v} = (2; 4)$ e $\vec{w} = (8; -2)$. [-6 e 1]

14 $\vec{u} = (4; -2; 2)$, $\vec{v} = (1; -2; 4)$ e $\vec{w} = (-4; 2; -2)$. [-1 e 0]

15 $\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$. [3 e 1]

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ sono noti i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Determina lo scalare k in modo che le seguenti uguaglianze siano soddisfatte.

16 $k\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| = 3\sqrt{5}$, con $\vec{u} = (-3; \sqrt{11})$ e $\vec{v} = (2; -1)$. $[k = 1]$

17 $\|k\vec{u} - \vec{v}\| + k\|\vec{u} + \vec{v}\| = 16$, con $\vec{u} = (1; 1)$ e $\vec{v} = (3; -1)$. $[k = 3]$

18 Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ considera i vettori $\vec{u} = (-4; 2)$, $\vec{v} = (1; q)$ e lo scalare $k = \sqrt{5}$. Determina la componente q in modo che la seguente uguaglianza sia valida:

$\|k\vec{u}\| + k\|\vec{u} + \vec{v}\| = 25$. $[q = -8 \vee q = 4]$

19 Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ è dato $\vec{a} = (1; -1)$. Determina q in modo che $\vec{b} = (-3; q)$ risulti ortogonale ad $\vec{a}$. Costruisci con i due vettori una base ortonormale. Verifica i risultati.

$\left[-3, \vec{a'} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \vec{b'} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

20 Dato $\vec{a} = (2; -1; -2) \in \mathbb{R}^3$, determina h e k in modo che $\vec{b} = (1; -2; h)$ e $\vec{c} = (2; 2; k)$ risultino ortogonali ad $\vec{a}$. Costruisci con i tre vettori una base ortonormale. Verifica i risultati.

$\left[2 \text{ e } 1, \vec{a'} = \left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right), \vec{b'} = \left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right), \vec{c'} = \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)\right]$

21 Dato $\vec{a} = (2; -1; 3) \in \mathbb{R}^3$, determina q in modo che $\vec{b} = (1; 4q; q)$ risulti ortogonale ad $\vec{a}$. Verifica l'ortogonalità dei due vettori. [2]