LABORATORIO DI MATEMATICA
LE DISTRIBUZIONI DI PROBABILITÀ

Operatori di Excel per le distribuzioni di probabilità

L'operatore	determina
DISTRIB.NORM(x; μ; σ; VERO)	i valori della funzione di distribuzione di probabilità $F(x) = P(X \leq x)$. Con x indichiamo il valore per il quale si desidera la probabilità, con μ la media e con σ lo scarto quadratico medio.
DISTRIB.NORM(x; μ; σ; FALSO)	i valori della funzione densità di probabilità $f(x)$.
NORMALIZZA(x; μ; σ)	il valore normalizzato della variabile casuale x.
DISTRIB.NORM.ST(z)	i valori della funzione di distribuzione di probabilità standard $F(z) = P(Z \leq z)$.
INV.NORM(p; μ; σ)	il valore della variabile casuale x corrispondente alla distribuzione di probabilità p.

ESERCITAZIONE GUIDATA

Una fabbrica produce rasoi la cui durata ha una distribuzione normale. Costruiamo un foglio che determini la probabilità che un rasoio duri

a) sino a m anni, b) almeno n anni, c) un tempo compreso fra p e q anni,

e il numero dei rasoi corrispondenti, dopo aver ricevuto la durata media μ, la deviazione standard σ, i numeri m, n, p, q espressi in anni e il numero r dei rasoi prodotti.
Rappresentiamo poi i grafici della funzione densità di probabilità e della funzione di ripartizione in un intervallo temporale da t_1 a t_2 anni.
Proviamo il foglio con $\mu = 6$, $\sigma = 1{,}5$, m = 8, n = 7, p = 4, q = 9, r = 1000, $t_1 = 0$ e $t_2 = 12$.

L'analisi del problema

Per determinare le distribuzioni di probabilità richieste con l'aiuto di Excel, scegliamo di applicare l'operatore DISTRIB.NORM.

Osservazione. In alternativa, potremmo anche operare come nella teoria. Normalizziamo la variabile casuale x con l'operatore NORMALIZZA e poi otteniamo dall'operatore DISTRIB.NORM.ST, come se la leggessimo nella tavola di Sheppard, la distribuzione di probabilità. Più precisamente nella tavola troviamo i valori di $P(z)$ calcolati da 0 a z, dall'operatore di Excel otteniamo i valori di $P(z)$ calcolati da $-\infty$ a z, cioè il valore dato da DISTRIB.NORM.ST corrisponde alla somma tra il valore della tavola e 0,5.

La costruzione del foglio

- Scriviamo alcune didascalie e mettiamo un bordo alle celle che devono contenere i dati d'ingresso.

cella	contenuto
D4	la media
D5	la deviazione standard
B8	l'anno sino al quale è probabile che durino i rasoi
B9	l'anno oltre il quale è probabile che durino i rasoi
B10 e B11	l'anno entro i quali è probabile che durino i rasoi
G8, G9 e G11	il numero dei rasoi prodotti

- Per ottenere la percentuale di probabilità del:

caso	contenuto	in
a	=DISTRIB.NORM(B8; D4; D5; VERO)	D8
b	=1 − DISTRIB.NORM(B9; D4; D5; VERO)	D9
c	=DISTRIB.NORM(B11; D4; D5; VERO) − DISTRIB.NORM(B10; D4; D5; VERO)	D11

- Determiniamo il numero dei rasoi che soddisfano le probabilità di durata richieste, immettendo le formule =D8*G8 in E8, =D9*G9 in E9, =D11*G11 in E11.

I dati

- Immettiamo i dati proposti dal problema e vediamo il foglio come in figura 1.

	A	B	C	D	E	F	G
1	La distribuzione normale o gaussiana						
2							
3	La durata dei rasoi prodotti da una fabbrica si distribuisce normalmente						
4	con una media di			6,0	anni		
5	e una deviazione standard di			1,5	anni.		
6							
7	La probabilità della durata			è del	corrispondente a		
8	sino a	8,0	anni	90,88%	909	rasoi su	1000
9	di almeno	7,0	anni	25,25%	252	rasoi su	1000
10	da	4,0	anni				
11	a	9,0	anni	88,60%	886	rasoi su	1000

▲ **Figura 1** Il foglio con le distribuzioni di probabilità.

La tabella per i grafici di *f*(*x*) e di *F*(*x*)

- Costruiamo una tabella (figura 2) con i valori delle funzioni di probabilità dalla quale ottenere i grafici richiesti.
- Indichiamo dove immettere gli estremi dell'intervallo di variazione espressi in anni, ponendo dei bordi alle celle B15 e B16.
- Per realizzare il caso proposto dal problema, immettiamo 0 in B15 e 12 in B16.
- Calcoliamo l'incremento scrivendo =(B16 − B15)/12 in B17.
- Carichiamo la prima colonna con i valori della x, in A20 digitiamo =B15, in A21 digitiamo =A20 + B17 e la copiamo sino alla cella A32.

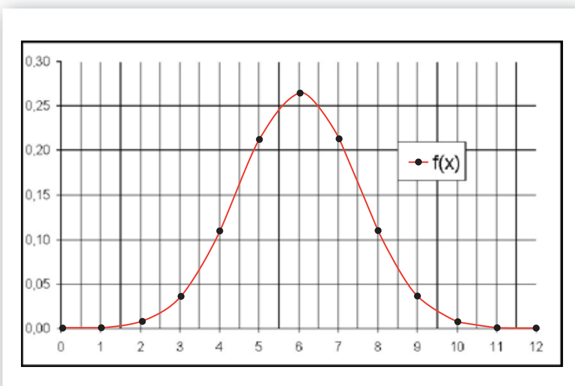
- Mettiamo nella seconda colonna i valori della funzione densità di probabilità, in B20 digitiamo =DISTRIB.NORM(A20; D4; D5; FALSO) oppure = 1/(D5*RADQ(2*PI.GRECO()))* EXP(− − (((A20 − D4)^2)/(2*D5^2))) e la copiamo sino alla cella B32.
- Poniamo nella terza colonna i valori della funzione distribuzione di probabilità, in C20 digitiamo =DISTRIB.NORM(A20; D4; D5; VERO) e la copiamo sino alla cella C32.

I grafici di $f(x)$ e di $F(x) = P(X < x)$

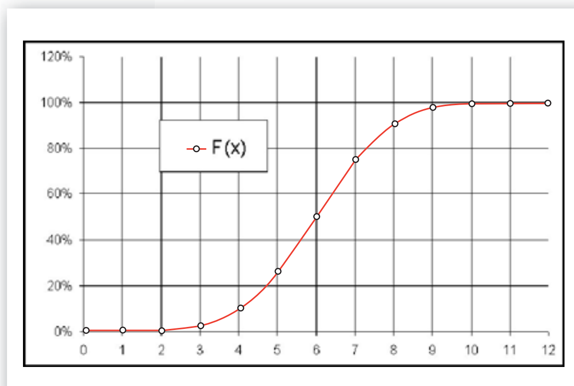
- Per realizzare il grafico di $f(x)$, evidenziamo la zona A19:B32, usiamo il comando *Inserisci_Grafico*, nelle finestre di dialogo conseguenti scegliamo un riferimento cartesiano, confermiamo le proposte di Excel e memorizziamo il grafico in *Grafico 1* (figura 3).
- Per ottenere il grafico di $F(x)$, evidenziamo la zona A19:A32 e poi, tenendo premuto il tasto CTRL, la zona C19:C32, operiamo poi come prima e memorizziamo il grafico in *Grafico 2* (figura 4).

	A	B	C
12			
13	Le tabelle per i grafici di f(x) e di F(x)		
14			
15	t1 =	0,00	anni
16	t2 =	12,00	anni
17	delta t =	1,00	anni
18			
19	x	f(x)	F(x)
20	0,00	0,0001	0,00%
21	1,00	0,0010	0,04%
22	2,00	0,0076	0,38%
23	3,00	0,0360	2,28%
24	4,00	0,1093	9,12%
25	5,00	0,2130	25,25%
26	6,00	0,2660	50,00%
27	7,00	0,2130	74,75%
28	8,00	0,1093	90,88%
29	9,00	0,0360	97,72%
30	10,00	0,0076	99,62%
31	11,00	0,0010	99,96%
32	12,00	0,0001	100,00%

► **Figura 2** La tabella per i grafici.



▲ **Figura 3** La funzione densità di probabilità.



▲ **Figura 4** La funzione distribuzione di probabilità.

Esercitazioni

Dopo aver svolto l'analisi di ognuno dei seguenti problemi, costruisci un foglio elettronico che permetta l'ingresso dei dati, calcoli e mostri gli eventuali risultati e realizzi i grafici indicati. Prova il foglio con i dati proposti.

1 Da un'urna contenente v palline verdi, b palline bianche si estraggono contemporaneamente due palline. Determina la distribuzione di probabilità e la funzione di ripartizione della variabile casuale: X = «Se escono due palline con colore diverso 0, altrimenti 1» e rappresentale graficamente. Prova con $v = 11$ e $b = 4$.

[0, 1; 41,90%, 58,10%]

2 Si estrae un gettone da una scatola contenente a gettoni numerati da 1 ad a e un gettone da un'altra scatola contenente b gettoni numerati da 1 a b. I numeri a e b al massimo possono valere 10. Determina la distribuzione di probabilità e la funzione di ripartizione della variabile casuale X = «somma dei due numeri estratti» e rappresentale graficamente. Prova con $a = 4$ e $b = 3$.

[2, 3, 4, …; 8,33%, 16,67%, 25,00%, …; 8,33%, 25,00%, 50,00%, …]

3 Un'urna contiene n palline numerate da 1 a n (il numero n al massimo può valere 10). Si estraggono contemporaneamente due palline e non si considera la pallina con il numero minore. Per la variabile casuale dei valori maggiori ottenuti, determina la distribuzione di probabilità e la funzione di ripartizione. Calcola la probabilità di avere un numero minore o uguale a m. Prova con $n = 5$ e $m = 3$. [30%]

4 Un'urna contiene m palline numerate da 1 a m, una seconda n palline numerate da 1 a n. Si estrae una pallina dalla prima urna e la si mette nella seconda, poi si estrae una pallina dalla seconda. Determina e rappresenta graficamente la distribuzione di probabilità della variabile casuale X = «numero delle palline con il numero 1 estratte». Prova con $m = 4$ e $n = 3$. [0, 1, 2; 56,25%, 31,25%, 12,5%]

5 Tre concorrenti tirano contemporaneamente a un bersaglio. Il primo ha una probabilità di fare centro del p%, il secondo dell's%, il terzo del t%. Determina la distribuzione di probabilità relativa ai tiri andati a centro e rappresentala graficamente. Prova con $p = 80\%$, $s = 70\%$ e $t = 50\%$.

[3, 2, 1, 0; 28%, 47%, 22%, 3%; 28%, 75%, 97%, 100%]

6 Il banco B estrae consecutivamente due palline da un'urna contenente n palline nere e v palline verdi, rimettendo ogni volta la pallina nell'urna. Il giocatore A punta p euro e vince v_A euro se sono di colore diverso. Il giocatore C punta p euro e vince v_C euro se entrambe sono di colore verde. Dopo aver assegnato p, calcola v_A e v_C in modo che il gioco sia equo. Prova con $n = 12$, $v = 6$ e $p = 10$ euro. Simula 100 giocate.

[$v_A = 12{,}50$ euro, $v_C = 80$ euro]

7 Una scatola contiene r gettoni rossi, b gettoni blu e g gettoni gialli. Il giocatore A estrae uno alla volta tre gettoni, rimettendo ogni volta il gettone nella scatola. Se escono nell'ordine giallo, blu, blu, vince v euro; se escono nell'ordine rosso, blu, giallo, si ripete l'estrazione; altrimenti paga la posta p al giocatore B. Dopo aver assegnato p, calcola v in modo che il gioco sia equo. Prova con $r = 4$, $b = 8$, $g = 4$ e $p = 10$ euro. Simula 300 giocate. [$v = 145$ euro]

8 Data la seguente distribuzione di probabilità della variabile casuale X

X	1	2	3	4	5
$P(X)$	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5

determina la deviazione standard e la probabilità che X rimanga al di sotto di un valore v. Prova con $p_1 = 0{,}033333$, $p_2 = 0{,}2$, $p_3 = 0{,}166667$, $p_4 = 0{,}2$, $p_5 = 0{,}4$ e $v = 4$. Determina poi p_4 e p_5 in modo che la deviazione standard risulti uguale a 1,2.
(Suggerimento. Per determinare la deviazione standard richiesta, puoi usare lo strumento di Excel *Strumenti_Ricerca Obiettivo* applicato alla cella contenente la deviazione standard, indicando come obiettivo il valore richiesto e come variabile il contenuto della cella p_4.)

[1,26; 40%: 0,795433, 0,304567]

9 Dopo aver letto le seguenti distribuzioni di probabilità di due variabili casuali indipendenti X e Y, determina la covarianza di X e Y. Prova con $p_1 = 0{,}40$, $p_2 = 0{,}35$, $p_3 = 0{,}10$, $p_4 = 0{,}15$ e con $q_1 = 0{,}20$, $q_2 = 0{,}50$, $q_3 = 0{,}05$, $q_4 = 0{,}25$.

X	1	2	3	4
$P(X)$	p_1	p_2	p_3	p_4

Y	2	4	6	8
$P(Y)$	q_1	q_2	q_3	q_4

[0]

10 Supponi di conoscere i numeri medi degli spettatori e le deviazioni standard nei giorni di venerdì, sabato e domenica nelle sale cinematografiche di tre città A, B e C. Dopo aver registrato il numero degli spettatori di un certo film proiettato nelle tre sale e nei tre giorni, determina in quale giorno e in quale città il film ha ottenuto più successo. Prova il foglio con i seguenti dati.

Giorno	venerdì			sabato			domenica		
Città	numero medio di spettatori	deviazione standard	numero spettatori del film	numero medio di spettatori	deviazione standard	numero spettatori del film	numero medio di spettatori	deviazione standard	numero spettatori del film
A	80	30	105	100	20	125	90	30	120
B	130	45	160	150	50	180	120	50	160
C	100	40	130	150	30	160	100	20	120

[al sabato nella città A]

11 Il tempo impiegato da tre macchine per rifinire dei pezzi meccanici presenta una distribuzione normale. Le medie rispettive, espresse in minuti, sono m_1, m_2 e m_3 e la deviazione standard σ è la stessa per le tre macchine. Determina, per ogni macchina, le probabilità che il tempo impiegato sia al massimo di a minuti, sia almeno di b minuti, sia compreso fra c e d minuti. Traccia il grafico delle tre funzioni di densità di probabilità nel medesimo riferimento cartesiano in un intervallo da t_1 a t_2 minuti. Prova con $m_1 = 40$, $m_2 = 60$, $m_3 = 80$, $\sigma = 12$, $a = 50$, $b = 50$, $c = 50$, $d = 70$.

[79,77%, 20,23%, 19,61%; 20,23%, 79,77%, 59,53%; 0,62%, 99,38%; 19,61%]

12 Due macchine confezionano ciascuna diecimila sacchetti di cioccolatini, il cui peso si distribuisce normalmente con una media di m grammi e la deviazione standard della prima è di σ_1 grammi, quella della seconda è di σ_2 grammi. Calcola il numero dei sacchetti che probabilmente hanno un peso fra g_1 e g_2 grammi. Rappresenta i grafici della funzione densità di probabilità e della funzione di ripartizione in un intervallo da g_1 a g_2 grammi. Prova con $m = 250$, $\sigma_1 = 15$, $\sigma_2 = 12$, $g_1 = 240$ e $g_2 = 260$. Traccia i grafici delle due funzioni di densità di probabilità e delle due funzioni di ripartizione. [4950, 5953]

13 La durata di una lampadina si distribuisce normalmente. La durata media è di m ore, la deviazione standard è di σ ore, la durata massima del p% delle lampadine è di h ore, la durata fra h_1 e h_2 è del q%, la durata minima dell'r% che dura di più è di h_m ore. Dati m, σ e p, determina h. Dati m, σ, q e h_1, determina h_2. Dati m, σ, q e h_2, determina h_1. Dati m, σ e r, determina h_m. Prova con $m = 1500$ ore, $\sigma = 200$ ore, $p = 80\%$, $q = 24{,}18\%$, $h_1 = 1600$ ore, $h_2 = 1800$ ore, $r = 10\%$. [1668,32 ore; 1800,11 ore; 1599,96 ore; 1756,31 ore]

14 Una macchina produce pezzi la cui lunghezza si distribuisce normalmente. Sapendo che la deviazione standard è di σ mm e la probabilità che i pezzi abbiano al massimo una lunghezza di l mm è del p%, determina la media m. Prova con $\sigma = 18$ mm, $l = 135$ mm e $p = 20{,}23\%$.
(Suggerimento. Per determinare la media puoi usare lo strumento di Excel *Strumenti_Ricerca Obiettivo* applicato alla cella contenente la formula DISTRIB.NORM(*lungh*; *media*, *scarto*; VERO), indicando come obiettivo il valore di p e come variabile il contenuto della cella *media*, oppure puoi realizzare una tabella con dei valori di m che si avvicinino con approssimazioni successive a quello incognito.)

[$m = 150$ mm]

15 Realizza la tavola di Sheppard.