

# LABORATORIO DI MATEMATICA

## LE FUNZIONI DI DUE VARIABILI CON DERIVE

### ESERCITAZIONE GUIDATA

Le quadriche sono superfici le cui equazioni sono di secondo grado in  $x$ , in  $y$  e in  $z$ . Con Derive tracciamo il grafico di alcune di esse, per esempio dell'ellissoide di equazione:

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

Tracciamo poi il grafico del paraboloido di equazione

$$z = x^2 - y^2$$

e di alcune curve di livello ottenute tagliando la superficie del paraboloido con piani paralleli al piano  $z = 0$  e piani paralleli al piano di equazione  $y = 0$ .

Tracciamo poi il grafico dei dati e dei risultati.

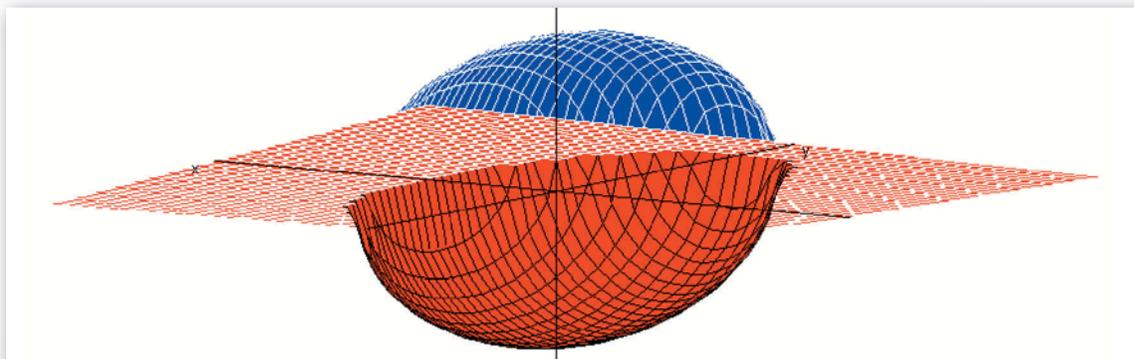
### L'ellissoide

- Con *Crea\_Espressione* digitiamo l'equazione dell'ellissoide e la inseriamo nella #1 (figura 1).
- Esplicitiamo la  $z$  con *Risolvi\_Espressione*.
- Scriviamo dentro un'istruzione IF l'equazione della parte dell'ellissoide che sta sopra al piano  $xy$  e la inseriamo nella #4.
- Impostiamo la medesima istruzione per la parte inferiore nella #5.
- Entriamo in *Finestra\_Grafica 3D*, dove diamo *Opzioni\_Semplifica prima di tracciare il grafico* e poi facciamo clic su *Traccia*, ottenendo il grafico della parte superiore dell'ellissoide (figura 2).

```
L'ellissoide
#1: x^2 + y^2/4 + z^2/4 = 1
#2: SOLVE(x^2 + y^2/4 + z^2/4 = 1, z)
#3: z = -sqrt(-4*x^2 - y^2 + 4) v z = sqrt(-4*x^2 - y^2 + 4)
#4: IF(-4*x^2 - y^2 + 4 >= 0, -sqrt(-4*x^2 - y^2 + 4), 0)
#5: IF(-4*x^2 - y^2 + 4 >= 0, sqrt(-4*x^2 - y^2 + 4), 0)
```

▲ Figura 1 Le istruzioni per l'ellissoide.

- Ritorniamo nella zona algebrica, dove evidenziamo la #5 (figura 1), l'etichetta che contiene l'equazione della parte inferiore.
- Ritorniamo nella finestra grafica a tre dimensioni, dove diamo *Traccia* ottenendo il grafico della parte inferiore.
- Con i comandi grafici a tre dimensioni, ora, possiamo osservare l'ellissoide (figura 2).



▲ Figura 2 L'ellissoide.

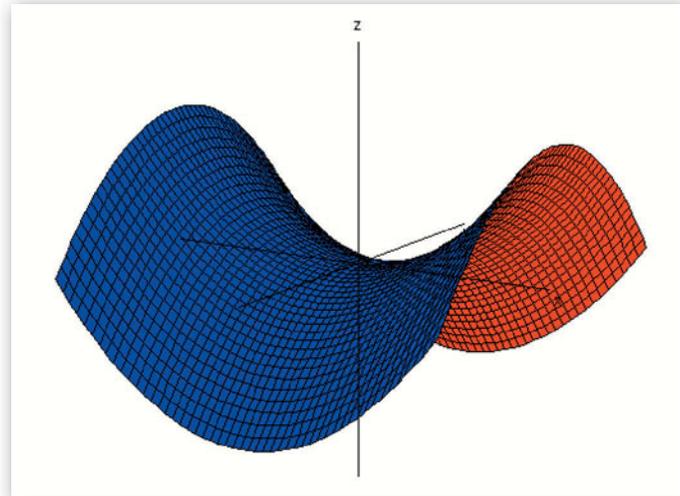
### Il paraboloido iperbolico

- In un'altra sessione di lavoro (figura 3), con *Crea\_Espressione* digitiamo l'equazione del paraboloido iperbolico  $z = x^2 - y^2$  e la inseriamo nella #1.
- Entriamo in *Finestra\_Grafica 3D*, dove facciamo clic su *Traccia*, ottenendo il grafico del paraboloido iperbolico, che presenta un punto di sella (figura 4).

I1 paraboloido iperbolico

#1:  $z = x^2 - y^2$

▲ Figura 3 L'equazione del paraboloido.



► Figura 4 Il paraboloido iperbolico.

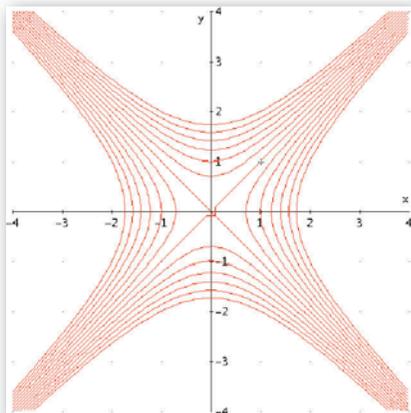
### Le linee di livello

- Ritorniamo nella zona algebrica, dove scriviamo l'istruzione per ottenere le sezioni della superficie con piani paralleli al piano  $z = 0$  e la inseriamo nella #2 (figura 5).
- Entriamo in *Finestra\_Grafica 2D*, dove usiamo *Opzioni\_Semplifica prima di tracciare il grafico* e poi facciamo clic su *Traccia*, notando in figura 6 come le linee di livello siano costituite da iperboli.
- Ritorniamo nella zona algebrica, dove scriviamo l'istruzione per ottenere le sezioni della superficie con piani paralleli al piano  $y = 0$ .
- In ambiente grafico a due dimensioni diamo *Traccia*, notando in figura 7 come le linee di livello siano costituite da parabole.

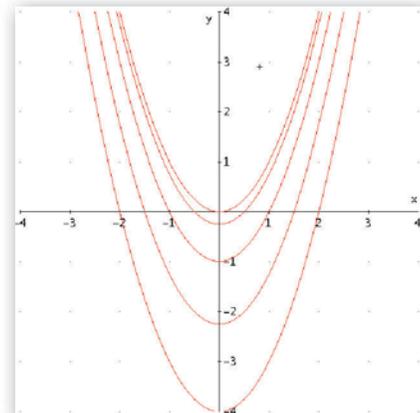
#2: VECTOR  $\left( z = x^2 - y^2, z, -3, 3, \frac{1}{2} \right)$

#3: VECTOR  $\left( z = x^2 - y^2, y, -2, 2, \frac{1}{2} \right)$

▲ Figura 5 Le istruzioni per le linee di livello.



▲ Figura 6 Le linee di livello di direzione xy.



▲ Figura 7 Le linee di livello di direzione xz.

## Esercitazioni

Con Derive traccia il grafico delle seguenti superfici, le cui equazioni sono di secondo grado nelle variabili  $x$ ,  $y$  e  $z$  in un riferimento tridimensionale, poi traccia i grafici bidimensionali di alcune curve di livello ottenute secondo la superficie con piani paralleli al piano  $Oxy$ , al piano  $Oxz$  e al piano  $Oyz$ .

Al termine classifica la superficie esaminata.

**1**  $z = \frac{x^2}{4} + y^2$

**4**  $\frac{x^2}{4} - y^2 - z^2 = 1$

**2**  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

**5**  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

**3**  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

**6**  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

Date le seguenti funzioni a due variabili determina l'equazione del piano tangente nel punto indicato.

Traccia il grafico della parte superiore della superficie in blu e la parte inferiore in rosso, quelle del piano entrambe in grigio.

(Suggerimento: per stabilire il colore di una superficie fai clic con il tasto destro del mouse sulla superficie stessa, seleziona *Modifica, Colore e Personalizzato* e, nella tavolozza che appare, scegli il colore desiderato.)

**7**  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4$ ,  $T(2; 1; 1)$ . [ $z = 4x + 2y - 9$ ]

**8**  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$ ,  $T(2; 2; 2)$ . [ $z = x + y - 2$ ]

**9**  $f(x, y) = x^3 + y^3$ ,  $T(1; 1; 2)$ . [ $z = 3x + 3y - 4$ ]

**10**  $f(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + 1}$ ,  $T(0; 0; 0)$ . [ $z = x + y$ ]

Con Derive determina gli eventuali punti stazionari delle seguenti funzioni a due variabili  $z = f(x, y)$ , costruisci una funzione utente utile per calcolare i valori dell'hessiano di una funzione e usala per determinare il tipo dei punti stazionari.

Traccia e osserva criticamente:

- il grafico di  $f(x, y)$  nello spazio cartesiano;
- dieci curve di livello nella zona dei punti stazionari della  $f(x, y)$  nel piano cartesiano.

**11**  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy$  [[ $(0; 0)$  sella,  $(\frac{2}{3}; \frac{2}{3})$  minimo]

**12**  $f(x, y) = \frac{x^2 - y}{y^2 + 1}$  [[ $(0; 1)$  minimo,  $(0; -1)$  sella]

**13**  $f(x, y) = x^4y - 5x^2y + 4y$  [[ $(1; 0)$ ,  $(-1; 0)$ ,  $(2; 0)$ ,  $(-2; 0)$  punti di sella]

**14**  $f(x, y) = x^2y^2 - 3x^2y + xy^2 - 3xy - 2y^2 + 6y$  [[ $(1; 0)$ ,  $(1; 3)$ ,  $(-2; 0)$ ,  $(-2; 3)$  punti di sella,  $(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$  massimo]