

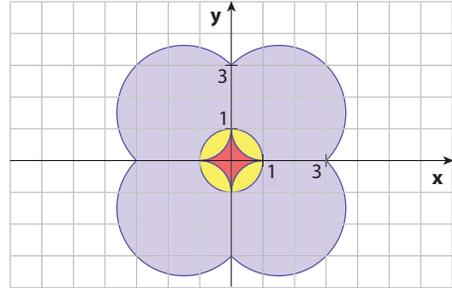
REALTÀ E MODELLI

SCHEDA DI LAVORO

1 Il fiore

Laura vuole preparare dei bigliettini al computer con un disegno stilizzato di un fiore. Ha a disposizione solo un programma di grafica vettoriale molto semplice, e quindi deve dare al computer le equazioni corrette degli archi di curva che compongono il disegno.

- Quali sono queste equazioni?



- Per trovare l'equazione della più esterna che forma il petalo del 1° quadrante, consideriamo che la curva passa per e per i punti e (0; 3), perciò il centro si trova in (1,5; 1,5).
L'equazione è:

$$x^2 + \text{input} - \text{input} - 3y = 0.$$

Gli altri archi sono simmetrici del primo rispetto agli assi x e y .
L'equazione complessiva è dunque:

$$x^2 + y^2 - \text{input} - \text{input} = 0.$$

La circonferenza intermedia ha equazione $x^2 + y^2 = 1$.

Il piccolo petalo nel primo quadrante è un arco della circonferenza $(x - 1)^2 + \text{input} = 1$; per rappresentare i quattro piccoli petali bisogna esplicitare la y , limitare i valori di x e inserire i valori .

Si ottiene:

$$\text{input} = 1 - \sqrt{2|x| - x^2} \quad \text{con } |x| \text{input} 1.$$

2 Si sussurra, ma si sente

Nella St Paul's Cathedral, a Londra, c'è la famosa Whispering Gallery, una balconata interna a circa 30 m dal suolo che ha questa caratteristica: se si sussurra rivolti verso il muro, tale suono può essere udito chiaramente in un qualunque altro punto della galleria, purché si metta l'orecchio vicino al muro. In questo caso si sfruttano delle proprietà di acustica legate alle frequenze di un suono sussurrato; in qualsiasi stanza ellittica, però, si può verificare lo stesso fenomeno se chi emette il suono e chi lo riceve occupano la posizione dei fuochi.

- ▶ Elisa e Filippo si trovano in una sala ellittica il cui semiasse maggiore è 12 m e quello minore 7 m. Determina in quali posizioni si devono mettere per poter verificare la proprietà descritta.
- ▶ Fissato il sistema di riferimento cartesiano nel modo consueto, considera il punto P dell'ellisse, nel primo quadrante, di ascissa 5, e verifica che le due rette passanti per P e per i fuochi sono simmetriche rispetto alla normale all'ellisse in P .

- ▶ Fissato il sistema di riferimento nel centro della stanza, l'equazione dell'ellisse è:

$$\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{49} = 1$$

da cui $c = \sqrt{144 - 49} \approx 9,5$ m. I due fuochi, e quindi le posizioni che devono occupare Elisa e Filippo, sono i punti $F_{1,2}(0; \pm 9,5)$.

- ▶ L'ordinata del punto P del primo quadrante si trova sostituendo $x = 5$ nell'equazione dell'ellisse e ricavando y :

$$\frac{25}{144} + \frac{y^2}{49} = 1 \rightarrow y = \frac{7}{12} \sqrt{144 - 25} \approx 6,4, \text{ perciò } P(5; 6,4).$$

Equazione della retta PF_1 : $\frac{y - 6,4}{x - 5} = \frac{0 - 6,4}{-9,5} \rightarrow y = 0,67x + 4,2$.

Equazione della retta PF_2 : $\frac{y - 6,4}{x - 5} = \frac{0 - 6,4}{9,5} \rightarrow y = -0,67x + 13,2$.

Con la formula di sdoppiamento si ottiene la tangente in P :

$$\frac{5x}{144} + \frac{6,4y}{49} = 1 \rightarrow y = 0,44x + 1,09$$

La normale in P sarà quindi:

$$y - 6,4 = -1,69(x - 5) \rightarrow y = -1,69x + 12,1$$

Per verificare che le rette PF_1 e PF_2 sono simmetriche rispetto alla normale in P , basta verificare che una delle due degli angoli formati dalle rette coincide con la normale (e l'altra, ovviamente, con la tangente).

Equazione delle bisettrici di PF_1 e PF_2 :

$$\frac{|0,44x - y + 4,2|}{\sqrt{0,44^2 + 1}} = \frac{|1,36x + y - 13,2|}{\sqrt{1,36^2 + 1}}$$

da cui:

prima bisettrice: $(0,44x - y + 4,2) \cdot 1,69 = (1,36x + y - 13,2) \cdot 1,09$
 $y = -0,27x + 7,7$ (equazione della bisettrice in P);

seconda bisettrice: $(0,44x - y + 4,2) \cdot 1,69 = -(1,36x + y - 13,2) \cdot 1,09$
 $y = 3,7x - 12,1$ (equazione della bisettrice in P).

Notiamo che dal punto di vista fisico ciò corrisponde a verificare la legge della riflessione, in quanto risultano uguali gli angoli formati dalla retta tangente in P con le rette PF_1 (raggio incidente) e PF_2 (raggio riflesso).

3 Le sonde Voyager

La sonda spaziale Voyager 2 è stata una delle prime esploratrici del sistema solare esterno, ed è ancora in attività. Lanciata il 20 agosto 1977 dalla NASA, poco prima della gemella Voyager 1, fu immessa in un'orbita che la portò a sfiorare i due pianeti giganti, Giove e Saturno. Durante il viaggio i tecnici si resero conto che potevano sfruttare un allineamento planetario piuttosto raro per far proseguire la sonda verso Urano e Nettuno.

Dalla legge di gravitazione universale si deduce che se un corpo (per esempio la sonda) arriva nella sfera di influenza gravitazionale di un altro corpo (per esempio Saturno) con una velocità sufficientemente elevata, non precipita né si mette in rotazione attorno al secondo corpo, ma si allontana seguendo una traiettoria iperbolica di cui il pianeta è un fuoco.

La traiettoria di Voyager 2 vicino a Saturno può essere descritta dalla seguente equazione (i valori sono espressi in chilometri):

$$\frac{x^2}{1,109 \cdot 10^{11}} - \frac{y^2}{1,320 \cdot 10^{11}} = 1,$$

mentre per Voyager 1 l'equazione analoga è:

$$\frac{x^2}{2,761 \cdot 10^{10}} - \frac{y^2}{9,502 \cdot 10^{10}} = 1.$$

- ▶ Quale delle due sonde si è avvicinata di più a Saturno?
- ▶ Quale delle due traiettorie ha eccentricità maggiore?

- ▶ Dato che Saturno si trova nel dell'iperbole, per trovare la minima distanza tra la navicella e il pianeta basta calcolare , ovvero del fuoco.

Nell'iperbole si ha $c^2 = \text{input}$, da cui:

per Voyager 1: $c^2 = \text{input} \rightarrow c \simeq 3,502 \cdot 10^5,$

per Voyager 2: $c^2 = \text{input} \rightarrow c \simeq 4,928 \cdot 10^5.$

La minima distanza di Voyager 1 da Saturno è stata 350 200 km, mentre per Voyager 2 è stata 492 800 km. La sonda che si è avvicinata di più a Saturno è .

- ▶ L'eccentricità è data da , perciò si ottiene:

per Voyager 1: $e = \text{input} \simeq 2,107,$

per Voyager 2: $e = \frac{4,928 \cdot 10^5}{3,330 \cdot 10^5} \simeq \text{input}.$

La traiettoria di Voyager 1 ha eccentricità .