REALTÀ E MODELLI SCHEDA DI LAVORO

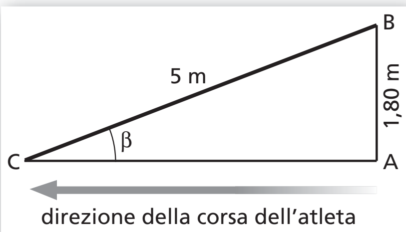
1 Il salto con l'asta

Un atleta partecipa a una gara di salto con l'asta. Al momento di imbucare l'asta nell'apposita guida si dà una spinta prima di sollevare i piedi da terra.

- Sapendo che l'asta è lunga 5 m e che la sua estremità è mantenuta all'altezza della testa dell'atleta alto 1,80 m, stabilisci l'angolo β di inclinazione iniziale (trascura l'elasticità dell'asta).
- Supponendo che il centro del sistema di riferimento sia collocato 2 m dopo il punto di inserimento dell'asta nell'apposita buca, scrivi in coordinate polari l'equazione della circonferenza alla quale appartiene l'arco della traiettoria descritta dall'estremità dell'asta.

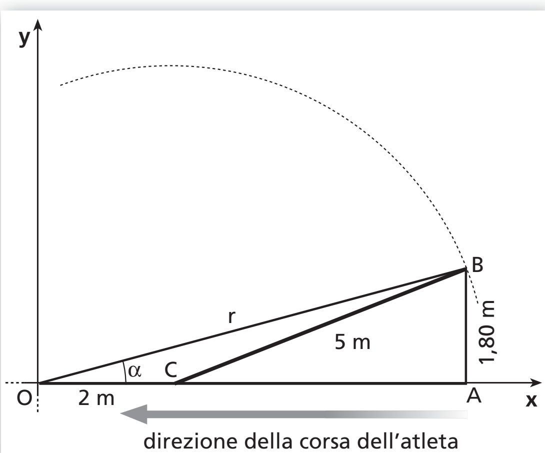
- Poiché l'asta è lunga 5 m e l'estremità si trova a un'altezza da terra di 1,80 m, basta utilizzare le relazioni per la risoluzione di un triangolo rettangolo. L'angolo di inclinazione è quindi dato da:

$$\overline{AB} = \underline{\qquad\quad} \rightarrow \operatorname{sen}\beta = \underline{\qquad} = \underline{\qquad} = 0{,}36 \rightarrow \beta = \underline{\qquad\quad} \simeq 21{,}1°.$$



◀ Figura 1

- Fissiamo il sistema di riferimento come indicato nel testo dell'esercizio.



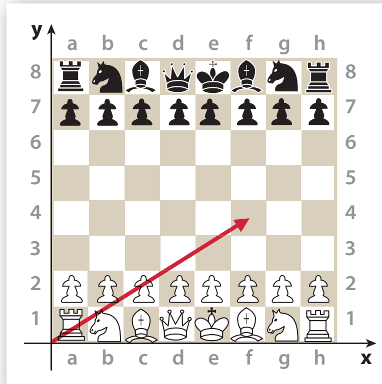
◀ Figura 2

Il centro della circonferenza descritta dall'estremità dell'asta, espresso in coordinate polari, è $C[r_C; \alpha_C] = C$ ______. Il raggio della traiettoria circolare è dato dalla ______ dell'asta e vale quindi ______.
Applichiamo il teorema ______ al triangolo di estremi O (origine del sistema di riferimento), B (estremo libero dell'asta) e C (centro della circonferenza), ottenendo l'equazione della circonferenza nelle coordinate ______ r ed ______:

$$\overline{BC}^2 = \underline{\qquad} + \underline{\qquad} - 2 \cdot \underline{\qquad} \cdot \underline{\qquad} \cdot \underline{\qquad},$$
$$25 = \underline{\qquad} - \underline{\qquad\qquad},$$
$$r^2 - 4 \cdot r \cdot \underline{\qquad} - 21 = 0.$$

2 Gli scacchi di Marostica

Nella piazza di Marostica, in provincia di Vicenza, si gioca periodicamente una partita a scacchi con personaggi «viventi». La scacchiera ha le caselle di 1,5 m di lato.
Posizioniamo il sistema di riferimento come mostrato in figura: ogni casella è così rappresentata da un vettore che ha come primo estremo l'origine e come secondo estremo il centro della casella stessa.



- Rappresenta con vettori le posizioni dei cavalli in G1 e B8, della torre in H8 e delle regine in D1 e D8.
- Il cavallo si muove «a elle», cioè due caselle in una direzione e una nella direzione perpendicolare. Indica con i vettori quali posizioni può occupare con una mossa il cavallo in G8.
- Ogni mossa può essere vista come somma di vettori: traduci in termini vettoriali la mossa di un alfiere che partendo da D2 si muove in diagonale fino al bordo destro della scacchiera.
  Di quanti metri si è spostato l'alfiere?

- Cavallo in G1: $\vec{v}(\quad; 0{,}75)$;
  cavallo in B8: $\vec{v}(2{,}25; \quad)$;
  torre in H8: $\vec{v}(\quad; 11{,}25)$;
  regina in D1: $\vec{v}(\quad; 0{,}75)$;
  regina in D8: $\vec{v}(5{,}25; \quad)$.
- Il cavallo nero in G8 può occupare (se libere) le caselle:
  $\quad \rightarrow \vec{v}(11{,}25; 8{,}25)$;
  $\quad \rightarrow \vec{v}(8{,}25; 8{,}25)$;
  $\quad \rightarrow \vec{v}(6{,}75; 9{,}75)$.
- D2 è individuata dal vettore $\vec{v_1}(\quad;\quad)$; la posizione di arrivo è H6, cioè $\vec{v_2}(\quad;\quad)$. Lo spostamento $\vec{v}$ per passare da D2 ad H6 è tale per cui $\vec{v_1} + \vec{v} = \vec{v_2}$, ovvero: $\vec{v} = \vec{v_2} - \vec{v_1} = (\quad;\quad) - (\quad;\quad) = (6; 6)$.
  Perciò $\vec{v}(6; 6)$.
  L'alfiere ha percorso la diagonale di un quadrato di lato 6 m, che è lunga $6 \cdot \sqrt{2} \simeq 8{,}49$ m.

3 Uno strano orologio

Uno studio di design vuole produrre un nuovo gadget: un oggetto simile a un orologio, che però segni con una lancetta i giorni della settimana anziché le ore.

- Determina le coordinate di sette punti che suddividono una circonferenza in sette archi uguali.

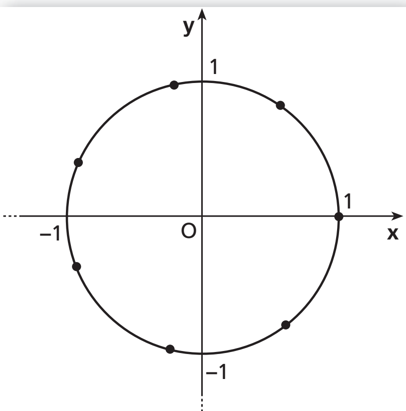
- Considerata la circonferenza con centro nell'origine di un sistema di riferimento e raggio unitario, la suddivisione in 7 parti si può effettuare rappresentando la radice settima dell'unità nel campo complesso.
  Con la formula:

$$u = \cos\frac{2k\pi}{\quad} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{\quad}, \text{ con } k = 0, 1, \dots, 6,$$

si ottengono le radici complesse.

Rappresentiamo quindi sulla circonferenza i punti aventi come coordinate la parte reale e la parte immaginaria dei numeri complessi così individuati.

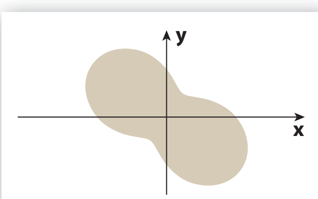
k	ascissa	ordinata
0	1	0
1	$\simeq 0{,}62$	$\simeq 0{,}78$
2	$\simeq -0{,}22$	$\simeq 0{,}97$
3	$\simeq -0{,}90$	$\simeq 0{,}43$
4	$\simeq -0{,}90$	$\simeq -0{,}43$
5	$\simeq -0{,}22$	$\simeq -0{,}97$
6	$\simeq 0{,}62$	$\simeq -0{,}78$



◀ **Figura 3**

Se la circonferenza dello «strano orologio» ha raggio R anziché 1, basterà moltiplicare per R le coordinate dei punti appena trovati.

4 L'arachide



Il profilo di un'arachide può essere rappresentato con una curva di equazione (in coordinate polari):

$r = a[1 + b\ \text{sen}\ (n\alpha)]$, con $a, b, n \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $-1 < b < 1$, $n > 0$.

La curva in figura è stata ottenuta ponendo $a = 2$, $b = -0{,}5$, $n = 2$.

▶ Determina i punti della curva di modulo massimo e minimo.

▶ Determina i valori di r e α per i quali la curva è definita.

▶ Scriviamo innanzitutto l'equazione della curva con i parametri indicati:

$$r = 2\left[1 - \frac{1}{2}\text{sen}\,(2\alpha)\right] = 2 - \text{sen}\,(2\alpha).$$

Per calcolare i punti di modulo minimo bisogna imporre:

$$2 - \text{sen}\,(2\alpha)\ \text{minimo} \rightarrow \text{sen}\,(2\alpha)\ \underline{\qquad} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{sen}\,(2\alpha) = \underline{\quad} \rightarrow 2\alpha = \underline{\quad} + 2k\pi \rightarrow \alpha = \underline{\quad} \vee \alpha = \underline{\quad}$$

(ci limitiamo ad $\alpha \in [0; 2\pi]$), valori per i quali si ottiene $r = 1$.

I punti di modulo minimo sono $\left[1; \quad\right]$ e $\left[1; \quad\right]$.

Per calcolare i punti di modulo massimo, analogamente:

$$2 - \operatorname{sen}(2\alpha) \quad \to \operatorname{sen}(2\alpha) \quad \to$$

$$\to \operatorname{sen}(2\alpha) = -1 \to 2\alpha = \quad + 2k\pi \to \alpha = \quad \vee \alpha = \quad$$

(ci limitiamo ad $\alpha \in [0; 2\pi]$), valori per i quali si ottiene $r = 3$.

I punti di modulo massimo sono $\left[3; \quad\right]$ e $\left[3; \quad\right]$.

▶ Perché la curva sia definita deve essere $r \quad 0$:

$$r = 2 - \operatorname{sen}(2\alpha) \quad 0 \to \operatorname{sen}(2\alpha) \quad 2.$$

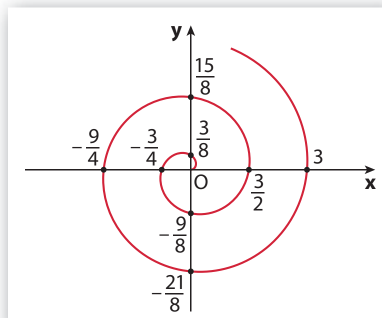
L'equazione è verificata per ogni valore di α, perché il seno di un angolo è sempre minore o uguale a 1, quindi la curva è definita per qualunque α.

5 La trottola

Una pattinatrice per prepararsi a eseguire una trottola percorre, dall'esterno verso l'interno, una traiettoria come quella mostrata in figura.

▶ Scrivi in coordinate polari l'equazione della curva.

▶ Di quanto si avvicina la pattinatrice al punto in cui eseguirà la trottola (posto nell'origine del sistema di riferimento) ogni volta che completa un giro? (Le misure del grafico sono espresse in metri.)



▶ La curva rappresentata nel grafico è una spirale di Archimede, di equazione lineare in coordinate polari r ed α del tipo $r = m\alpha + q$. Notiamo innanzi tutto che $q = 0$, quindi $r = m\alpha$, e che:

$$\alpha = 0 \to r = \quad,$$

$$\alpha = \pi \to r = \quad,$$

$$\alpha = \frac{3}{2}\pi \to r = \quad, \ldots$$

Quindi $m = \quad = \dfrac{3}{4\pi}$ e l'equazione della curva è:

$$r = \frac{3}{4} \cdot \frac{\alpha}{\pi}.$$

▶ Determiniamo il passo della spirale, cioè la distanza tra due punti successivi sull'asse x:

$$r(\quad) - r(\quad) = \frac{3}{2} - 0 = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

La pattinatrice si avvicina quindi al punto in cui eseguirà la trottola con un passo di 1,5 m a ogni giro eseguito.