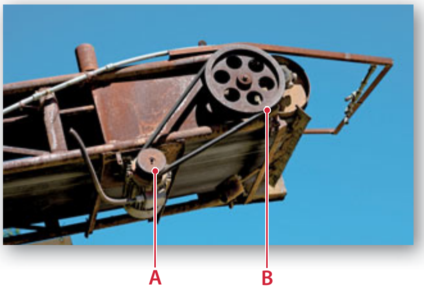
REALTÀ E MODELLI SCHEDA DI LAVORO

1 La cinghia di trasmissione

La cinghia è uno dei più semplici sistemi tecnologici per trasmettere il moto e quindi per trasportare materiali. Supponi che nel sistema in figura la ruota piccola (la motrice) abbia raggio di 1 dm, quella grande di 2 dm e la distanza tra i due centri sia di 6 dm.



Posiziona il sistema di riferimento cartesiano in modo tale che la ruota piccola abbia centro nell'origine e l'asse x passi per i centri delle due ruote.

- Trova l'equazione della retta a cui appartiene il tratto AB della cinghia (A e B rappresentano i punti di contatto fra la cinghia e le ruote).
- Qual è la velocità del nastro trasportatore (supposta uguale alla velocità lineare della cinghia) se il punto B impiega 0,9 s a portarsi su A?

- Le due circonferenze hanno equazione rispettivamente $x^2 + y^2 = 1$ e ____ $+ y^2 = 4$.
Data la generica retta $mx - y + q = 0$, in cui possiamo supporre $q < 0$ ed $m < 0$, imponiamo la condizione di ____ ad entrambe le circonferenze stabilendo che la distanza dal punto (0; 0) sia 1 e dal punto ____ sia 2.

$$\begin{cases} \dfrac{|q|}{\sqrt{m^2+1}} = 1 \\ \dfrac{|\quad\quad|}{\sqrt{m^2+1}} = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} q = -\sqrt{m^2+1} \\ |\quad - \sqrt{m^2+1}| = 2\sqrt{m^2+1} \end{cases}$$

Dalla ____ equazione otteniamo:

$$\quad + 1 + m^2 - 12m\sqrt{m^2+1} = 4 + 4m^2 \rightarrow 12m\sqrt{m^2+1} = \quad\quad \rightarrow 945m^4 - \quad\quad + 9 = 0$$

$$m^2 = \frac{171 \pm \sqrt{171^2 - 9 \cdot 945}}{945} = \frac{171 \pm 144}{945} \simeq \begin{cases} 0{,}33 \\ 0{,}03 \end{cases}$$

Il ____ valore però non è accettabile in quanto $33m^2 - 3 = 33 \cdot 0{,}33^2 - 3 \;\square\; 0$, mentre deve essere $12m\sqrt{m^2+1} \;\square\; 0$ (abbiamo supposto $m < 0$).
È accettabile invece $m^2 =$ ____ (poiché $33 \cdot 0{,}03^2 - 3 \;\square\; 0$), da cui si ricava $m \simeq$ ____ e quindi $q \simeq$ ____.
La retta che congiunge i punti A e B ha equazione (approssimata):

$$t_{AB}\colon y = \quad\quad x \;\square\; 1{,}01.$$

- Determiniamo (in modo approssimato) i punti A e B di ____. Per questo, determiniamo le ____ con t_{AB} delle due rette r_1 ed r_2 passanti rispettivamente per i centri delle due circonferenze e ____ a t_{AB} (in alternativa avremmo potuto determinare le intersezioni di ciascuna circonferenza con la retta t_{AB}, ma per le approssimazioni effettuate tale intersezione potrebbe non esistere oppure potrebbe essere data da due punti).

$$m = -\frac{1}{-0{,}17} \simeq 5{,}88 \quad \text{coefficiente} \quad\quad \text{delle rette} \quad\quad\quad \text{a } t_{AB},$$

$$r_1\colon y - 0 = m(x - 0) \rightarrow y = 5{,}88x \rightarrow \begin{cases} y = 5{,}88x \\ y = -0{,}17x - 1{,}01 \end{cases} \rightarrow A(-0{,}17; \quad\quad),$$

$$r_2\colon y - 0 = m(x - 6) \rightarrow y = 5{,}88x - \quad\quad \rightarrow \begin{cases} y = 5{,}88x - \quad\quad \\ y = \quad\quad x - 1{,}01 \end{cases} \rightarrow B(\quad\quad - 1{,}97).$$

La distanza dei punti A e B è:

$$AB = \sqrt{(\underline{\qquad} + \underline{\qquad})^2 + (\underline{\qquad} - \underline{\qquad})^2} \simeq 5{,}91\ \text{m},$$

quindi la velocità lineare del nastro trasportatore è:

$$v = \frac{\overline{AB}}{t} = \frac{\underline{\qquad}}{0{,}9} \simeq 6{,}6\ \text{m/s}.$$

2 Il lancio del peso

Il record del mondo di lancio del peso maschile è stato stabilito a Westwood il 20 maggio 1990 dallo statunitense Randy Barnes con la misura di 23,12 m.

- Supponendo che in questo lancio parabolico l'altezza massima di 3,5 m sia stata raggiunta dal peso dopo 10 m, fissato un opportuno sistema di riferimento (il lanciatore è fisso nell'origine), scrivi l'equazione della parabola descritta dal peso.
- Da quale altezza è partito il lancio?
- Se il lancio precedente avesse raggiunto dopo 10 m l'altezza massima di 5,5 m, di quanto sarebbe stato più corto rispetto al primo?

- Dobbiamo calcolare l'equazione della ____ noti il suo ____ e un punto. Il sistema da risolvere è quindi:

$$\begin{cases} -\underline{\qquad} = 10 \\ \dfrac{4ac - b^2}{4a} = 3{,}5 \\ \underline{\qquad}\, a + \underline{\qquad}\, b + c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \underline{\quad} \simeq -0{,}02 \\ \underline{\quad} \simeq 0{,}4 \\ \underline{\quad} \simeq 1{,}5 \end{cases} \rightarrow \quad y = -0{,}02x^2 + \underline{\quad}\, x + \underline{\quad}.$$

- Per determinare l'altezza ____ dalla quale è partito il lancio, poiché il lanciatore è nell'origine, basta calcolare il punto di ____ tra la parabola e l'asse y:

$$y(\underline{\quad}) = 1{,}5\ \text{m}.$$

- Bisogna innanzitutto calcolare l'equazione della parabola avente vertice nel punto $V(10; \underline{\quad})$ e passante per il punto $A(0; \underline{\quad})$ che rappresenta l'altezza ____:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 10 \\ \underline{\qquad\qquad} = 5{,}5 \\ \underline{\quad} = 1{,}5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \underline{\quad} = -0{,}04 \\ \underline{\quad} = 0{,}8 \\ \underline{\quad} = 1{,}5 \end{cases} \rightarrow \quad y = \underline{\qquad}\, x^2 + 0{,}8x + \underline{\quad}.$$

Per determinare la lunghezza del lancio bisogna calcolare l'intersezione tra la ____ e ____ (considereremo naturalmente il punto di ascissa positiva):

$$\begin{cases} y = \underline{\qquad}\, x^2 + 0{,}8x + \underline{\quad} \\ y = \underline{\quad} \end{cases} \rightarrow \quad B(\underline{\qquad}; 0).$$

Rispetto al lancio del record del mondo, il secondo è più corto di:

$$\text{lancio}_{WR} - \text{lancio}_2 = 23{,}12 - 21{,}73 = 1{,}39\ \text{m}.$$

3 **La sveglia**

Una sveglia da tavolo ha il quadrante a forma di ellisse con assi di 10 e 6 cm; le lancette sono fissate sull'asse maggiore (quello orizzontale), distanti 3 cm dal vertice destro, e i numeri delle ore sono scritti sul bordo esterno.

- ▶ Qual è la misura massima della lancetta più lunga?
- ▶ Fissato il sistema di riferimento cartesiano nel modo usuale, individua sul grafico dell'ellisse i punti in cui vanno scritte le ore (procedi solo per via grafica, non algebrica).

▶ Fissiamo il sistema di riferimento cartesiano nel modo usuale: centro del sistema di riferimento coincidente con il centro dell'ellisse, asse maggiore sovrapposto all'asse x. Dato che gli assi misurano 10 e 6 cm, si ha $a^2 = \underline{\quad}$, $b^2 = \underline{\quad}$ e di conseguenza $c^2 = \underline{\qquad} = 16$.

Perciò l'ellisse ha equazione $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ e i fuochi sono in $F(\underline{\quad}; 0)$, $F'(\underline{\quad}; 0)$.

Le lancette sono fissate nel punto $C(2; 0)$.

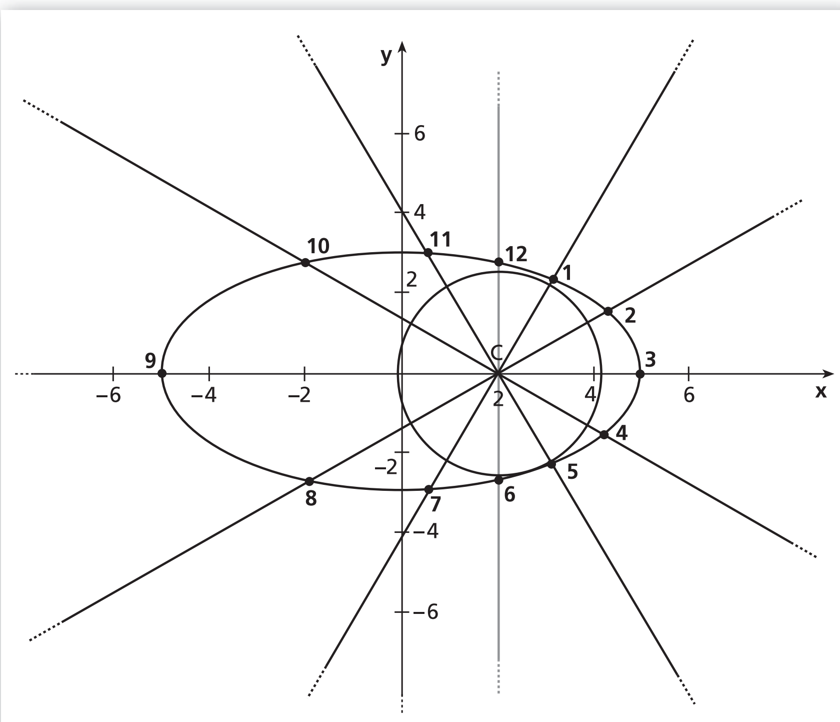
La lancetta dei minuti, lunga r, descrive una ____ di ____ C tale che ____ e ____ risultano ____; l'equazione di tale ____ è $(\underline{\qquad})^2 + y^2 = r^2$.

Imponiamo la condizione di tangenza:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ (\underline{\qquad})^2 + y^2 = r^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y^2 = \underline{\qquad\qquad} \\ \frac{x^2}{25} + \frac{\underline{\qquad\qquad}}{9} = 1 \end{cases} \quad \text{da cui:} \quad 16x^2 - 100x + 325 - 25r^2 = 0.$$

La condizione di ____ è $\frac{\Delta}{4} = 0$, ovvero $2500 - \underline{\qquad\qquad} = 0$ da cui $r^2 = \underline{\quad}$. La lunghezza massima della lancetta dei minuti sarà perciò $r = \underline{\quad} \simeq 2{,}6$ cm.

▶ Per posizionare i numeri delle ore sull'ellisse bisogna pensare che ____ descritto in un'ora dalla lancetta delle ore (o in 5 minuti dalla lancetta dei minuti) è un ____ dell'angolo ____, cioè ____. Perciò bisogna disegnare le rette con centro in C che formano con l'asse x angoli di ____; ____; ____ ecc. e segnare le intersezioni di tali rette con l'ellisse.

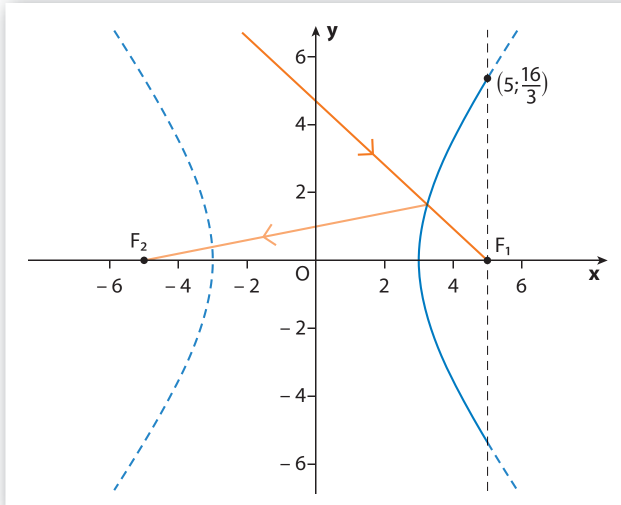


◀ **Figura 1**

4 Il telescopio

Un telescopio contiene uno specchio iperbolico la cui proprietà è quella di riflettere un raggio di luce che colpisce uno dei due fuochi nella direzione dell'altro fuoco.

- Se scegliamo un opportuno sistema di assi cartesiani con origine nel centro dell'iperbole, poniamo un fuoco in (5; 0), un vertice in (3; 0) e il punto finale dello specchio in $\left(5; \frac{16}{3}\right)$ come nella figura, qual è l'equazione che definisce lo specchio del telescopio?
- Supponiamo che il raggio incidente intersechi l'asse y nel punto di ordinata 4,3. In quale punto il raggio riflesso interseca l'asse y?



- L'iperbole è il luogo dei punti P che hanno costante la ______ delle distanze dai due fuochi F_1 ed F_2, quindi:

$$\overline{PF_1} \;\underline{\quad}\; \overline{PF_2} = k.$$

Dall'informazione delle coordinate dei fuochi ($\pm 5; 0$) e del punto finale dello specchio in $\left(5; \frac{16}{3}\right)$ possiamo determinare la costante:

$$\sqrt{(5+5)^2 + \left(\frac{16}{3}\right)^2} \;\underline{\quad}\; \sqrt{(5-5)^2 + \left(\frac{16}{3}\right)^2} = k \quad \rightarrow \quad k = 6.$$

L'equazione dell'iperbole per un generico punto P diventa:

$$\sqrt{\underline{\qquad}^2 + y^2} \;\underline{\quad}\; \sqrt{\underline{\qquad}^2 + y^2} = 6 \quad \rightarrow \quad 16x^2 - 9y^2 = \underline{\quad}.$$

- L'equazione del raggio ______ si trova come retta passante per i punti $F_1(5; 0)$ e $(0; 4{,}3)$:

$$\frac{y-0}{x-5} = \frac{\underline{\quad} - 0}{0-5} \quad \rightarrow \quad y = \underline{\qquad} x + 4{,}3.$$

Intersecando tale retta con l'iperbole si ottiene il punto in cui il raggio ______ colpisce lo specchio:

$$\begin{cases} y = \underline{\qquad} x + 4{,}3 \\ 16x^2 - 9y^2 = \underline{\quad} \end{cases}$$

da cui si ottiene l'equazione risolvente $9{,}3436x^2 + 66{,}564x - 310{,}41 = 0$, le cui soluzioni (approssimate) sono $-10{,}34$ e $3{,}21$. Il punto ______ del raggio incidente con lo specchio è quindi ______.
Il raggio ______ passa per tale punto e per il fuoco $(-5; 0)$; l'equazione di tale retta è:

$$\frac{y-0}{x+5} = \frac{\underline{\quad} - 0}{\underline{\quad} + 5} \quad \rightarrow \quad y = 0{,}19x + 0{,}95.$$

Ponendo $x = 0$ in questa equazione, troviamo $y = 0{,}95$, che è ______ del punto di ______ fra il raggio riflesso e l'asse y.