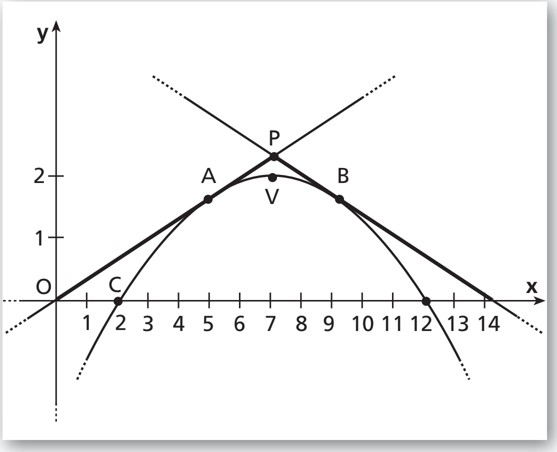
REALTÀ E MODELLI SCHEDA DI LAVORO

1 La mansarda

Per ultimare l'edificazione di una villetta occorre costruire il tetto a due spioventi sopra la mansarda. Come dato di progetto è noto quanto segue: considerata una parabola nel piano cartesiano con la concavità rivolta verso il basso, di vertice $V(7; 2)$ e passante per $C(2; 0)$, i due spioventi poggiano sui punti della parabola di ascissa 5 e 9 e risultano tangenti alla parabola nei punti di contatto.

▶ Determina l'altezza massima del tetto e l'angolo formato dai due spioventi.

▶ La situazione è rappresentata nella seguente figura.



◀ Figura 1

Innanzitutto bisogna determinare l'equazione $y = ax^2 + bx + c$ della parabola noti il vertice V ___ e un punto $C($___$)$. Il sistema da risolvere è il seguente:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 7 \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = 2 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \_\_\_ \\ b = \_\_\_ \\ c = \_\_\_ \end{cases} \rightarrow y = \_\_\_ .$$

I punti di ascissa 5 e 9 risultano quindi:

$$A\left(5; \_\_\_\right), \quad B\left(9; \_\_\_\right).$$

Scriviamo l'equazione delle rette tangenti nei punti A e B. Il coefficiente angolare della retta passante per A è la derivata della funzione calcolata nel punto considerato:

$$y' = \_\_\_ \rightarrow y'(5) = \_\_\_ .$$

L'equazione della retta tangente in $A\left(5; \_\_\_\right)$ alla parabola è quindi:

$$y - \_\_\_ = \_\_\_(x - 5) \rightarrow y = \_\_\_ .$$

Analogamente per il punto $B\left(9; \_\_\_\right)$ vale:

$$y'(9) = \_\_\_ \rightarrow y - \_\_\_ = \_\_\_ \rightarrow y = -\frac{8}{25}x + \frac{114}{25}.$$

Per determinare l'altezza basta calcolare l'ordinata del punto di intersezione tra le due rette

$$\begin{cases} y = \quad x + \quad \\ y = \quad x + \quad \end{cases} \rightarrow \text{ applicando il metodo di riduzione } \rightarrow \ y = \frac{58}{25} = 2,32.$$

Determiniamo l'angolo tra le due rette:

$$\operatorname{tg}\alpha = \quad = \frac{\quad}{1 - \frac{8}{25} \cdot \frac{8}{25}} \simeq 0,713 \ \rightarrow \ \alpha \simeq 35,5° \vee \alpha \simeq 180° - 35,5° = 144,5°.$$

Nel caso in esame l'angolo compreso tra le due rette per formare il tetto sarà quello di 144,5°.

2 Il profitto marginale

Un laboratorio artigianale produce sciarpe di qualità. Ogni mese ne vende 100 a un commerciante a € 35 l'una e generalmente riesce a vendere le altre a € 45 l'una. L'azienda sostiene un costo fisso mensile di € 1600, ogni sciarpa prodotta costa € 14 e in più c'è un costo variabile, che si può pensare proporzionale al cubo del numero di sciarpe prodotte, con costante di proporzionalità pari a € 0,0001.

- ▶ Esprimi il profitto mensile in funzione del numero di sciarpe prodotte, nell'ipotesi che vengano realizzati e venduti almeno 100 pezzi.
- ▶ Calcola la derivata di tale funzione, che viene chiamata *profitto marginale*.
- ▶ Utilizzando la definizione di derivata, interpreta il significato del profitto marginale.

▶ Indicando con x il numero di sciarpe prodotte, il ricavo è dato da:

$$R(x) = \qquad \text{con } x \geq 100,$$

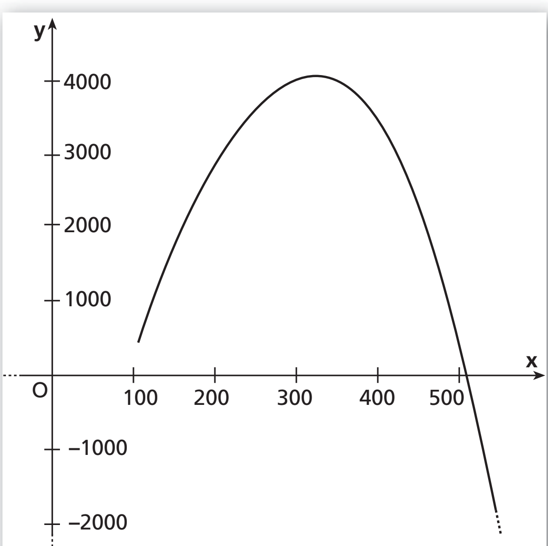
mentre i costi complessivi sono:

$$C(x) = \qquad \text{con } x > 0.$$

La funzione profitto risulta perciò:

$$P(x) = R(x) - C(x) = \qquad \text{con } x \geq 100.$$

Il grafico della funzione $P(x)$ è il seguente.

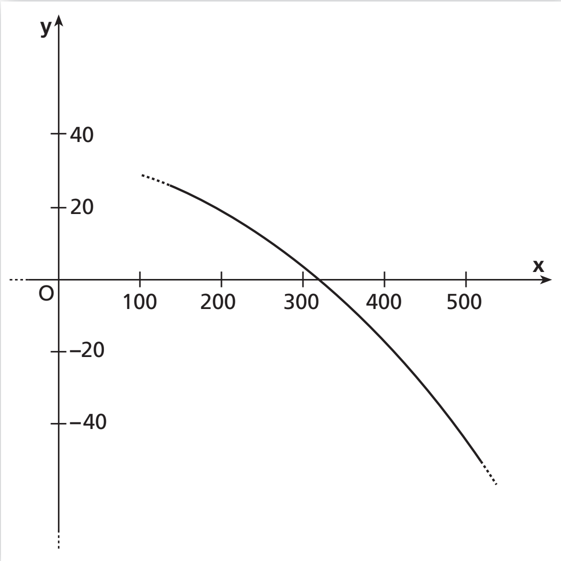


◀ **Figura 2**

► La derivata è:

$$P'(x) = \qquad\qquad, \quad x \geq 100.$$

Il grafico della funzione $P'(x)$ è il seguente.



◄ Figura 3

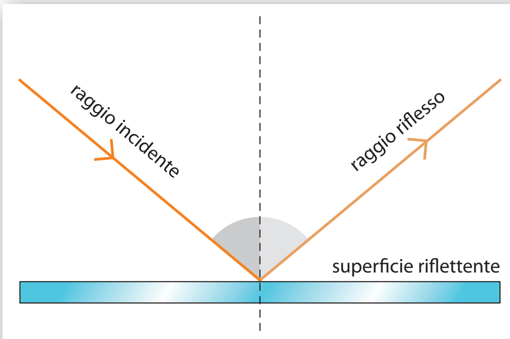
► La definizione di derivata è:

$$P'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x + \Delta x) - P(x)}{\Delta x}.$$

Il profitto marginale rappresenta la variazione di profitto in rapporto alla variazione della produzione. Sebbene l'abbiamo rappresentata con un grafico a linea continua, la funzione profitto ha come dominio l'insieme $\mathbb{N}$ e non $\mathbb{R}$ (il numero di pezzi prodotti è un numero naturale) e la situazione limite è la variazione di profitto relativa alla produzione di una unità in più, ovvero $P(x + 1) - P(x)$.

3 La riflessione della luce

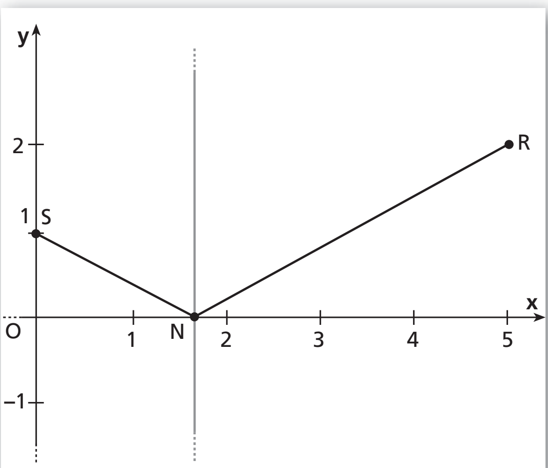
L'esperienza mostra che, quando un raggio luminoso incide su una superficie piana riflettente, il raggio riflesso forma con la normale al piano nel punto di incidenza un angolo uguale a quello di incidenza. Questa legge deriva dalla proprietà caratteristica della luce di seguire il percorso più breve possibile all'interno di uno stesso mezzo.



Nel piano cartesiano rappresentiamo uno specchio piano, visto in sezione, come una linea coincidente con l'asse x. Consideriamo i punti $S(0; 1)$, sorgente luminosa, e i punti $N(x; 0)$, con $0 < x < 5$, e $R(5; 2)$.

- Esprimi, in funzione di x, la lunghezza del percorso individuato dai segmenti SN e NR.
- Calcola la derivata di tale funzione lunghezza.
- Trova il punto stazionario della funzione lunghezza.
- Verifica che in corrispondenza del punto stazionario i segmenti SN e NR individuano il percorso effettivo del raggio luminoso.

- Rappresentiamo in un grafico la situazione.



◀ **Figura 4**

La lunghezza del percorso individuato dai segmenti SN ed NR è:

$$l(x) = \overline{SN} + \overline{NR} = \qquad\qquad = \qquad\qquad$$

con $0 < x < 5$.

- Deriviamo la funzione $l(x)$; otteniamo:

$$l'(x) = \frac{2x}{\qquad} + \frac{2x - 10}{\qquad} = \qquad\qquad.$$

- Dobbiamo determinare i punti per i quali la derivata è nulla:

$$l'(x) = 0 \;\rightarrow\; \frac{x}{\qquad} = \frac{5 - x}{\qquad}.$$

Dato che entrambi i numeratori e denominatori sono positivi per le condizioni poste, possiamo elevare al quadrato, ottenendo l'equazione:

$$\qquad\qquad = (5 - x)^2(x^2 + 1) \;\rightarrow\; 3x^2 + 10x - 25 = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; x = \qquad\qquad = \qquad \;\rightarrow\; x_1 = \quad \vee\; x_2 = \quad.$$

L'unica soluzione accettabile è $x = \square$.

▶ In corrispondenza del punto stazionario $x = \square$ si ha il punto di coordinate $N\left(\square;0\right)$.

I segmenti SN ed NR giacciono su rette di coefficiente angolare:

$$m_{SN} = \square = -\frac{3}{5},\ m_{NR} = \square = \square = \frac{3}{5}.$$

Quindi $m_{SN} = -m_{NR}$, i segmenti sono ___ rispetto alla perpendicolare all'asse x (cioè allo specchio) passante per N. Questo mostra che i segmenti individuano il percorso del raggio luminoso.

4 **La crociera**

Un'agenzia organizza una crociera nel Mediterraneo. La nave è in grado di percorrere le 1200 miglia della crociera a una velocità massima di circa 22 nodi (1 miglio nautico = 1,852 km, 1 nodo = 1,852 km/h). Il consumo di combustibile, espresso in tonnellate per miglia nautiche, è proporzionale al quadrato della velocità, con il coefficiente di proporzionalità $k = 0{,}001$. Il costo minimo, per una tonnellata di combustibile, è circa di € 407 e la spesa oraria complessiva per il personale di bordo è circa di € 4050.

▶ Determina la funzione che esprime il costo totale della crociera, dovuto al carburante e al personale, in funzione della velocità v di navigazione.

▶ Individua il punto stazionario di tale funzione.

▶ Sulla base di un grafico approssimato della funzione costo totale, stabilisci se in corrispondenza del punto stazionario trovato il costo è inferiore o superiore a quello che si avrebbe per altre velocità di crociera.

▶ Determiniamo la funzione che esprime la spesa complessiva $C(v)$ in funzione della velocità.

La spesa per il carburante è proporzionale al quadrato della velocità $(0{,}001 \cdot v^2)$; tenendo conto del numero di miglia previsto e del costo a tonnellata del combustibile si ottiene:

$$C_{carburante}(v) = \square.$$

La spesa totale per il personale si trova moltiplicando il costo orario complessivo per il tempo di traversata (quest'ultimo è dato dal rapporto tra lo spazio percorso e la velocità v misurata in miglia all'ora):

$$C_{personale}(v) = \square \cdot 4050.$$

La spesa complessiva in funzione della velocità è quindi:

$$C(v) = \square = 1200 \cdot \square.$$

▶ La derivata rispetto alla velocità v della funzione costo è:

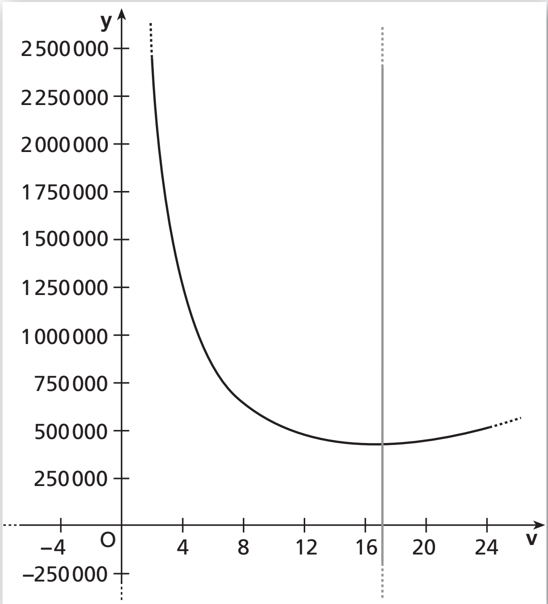
$$C'(v) = 1200 \cdot \square.$$

Poniamo la derivata uguale a zero per determinare i punti stazionari:

$$C'(v) = 0 \ \rightarrow \ \square = 0 \ \rightarrow \ \square = 0 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ v^3 = \square \ \rightarrow \ v = \square \simeq 17 \text{ nodi}.$$

▶ Il grafico approssimato della funzione $C(v)$ è il seguente.



◀ Figura 5

In corrispondenza del punto stazionario trovato (velocità $v = 17$ nodi), si ha il costo totale inferiore per la crociera.