REALTÀ E MODELLI SCHEDA DI LAVORO

1 La lattina per l'olio

Una piccola azienda agricola deve ordinare le lattine per confezionare l'olio che produce. La lattina ha la forma di parallelepipedo con base quadrata e l'altezza deve essere di 30 cm.

▶ Trova in quale intervallo può variare il lato del quadrato di base per fare in modo che la lattina piena contenga almeno 0,7 litri d'olio, ma abbia una massa complessiva non superiore a 1,3 kg (spessore della latta 2 mm; densità dell'olio 0,915 kg/dm^3; densità dell'alluminio 2,7 kg/dm^3).

▶ Chiamiamo x il lato del quadrato di base della lattina e trasformiamo le misure in decimetri; il volume della lattina risulta perciò ____ dm^3. La prima disequazione è:

$$3x^2 \geq 0{,}7.$$

Per calcolare ________ della lattina (vuota) bisogna moltiplicare l'area della sua superficie totale (trascuriamo il foro di apertura) per lo spessore della latta, ottenendo il volume di alluminio utilizzato, quindi moltiplicare questo volume per la densità dell'alluminio.

$$\underline{\hspace{1.5cm}}\ \textit{della lattina vuota} = (4x \cdot 3 + 2x^2) \cdot 0{,}02 \cdot 2{,}7 = 0{,}108x^2 + 0{,}648x,$$

$$\textit{massa dell'olio} = 3x^2 \cdot \underline{\hspace{1.2cm}} = \underline{\hspace{1.2cm}}\,x^2,$$

$$\textit{massa totale} = 0{,}108x^2 + 0{,}648x + \underline{\hspace{1.2cm}}\,x^2 = \underline{\hspace{3.5cm}}.$$

La massa totale non deve superare 1,3 kg, quindi la seconda disequazione è:

$$\underline{\hspace{3.5cm}} \leq 1{,}3.$$

Ricordando che x deve essere ________ perché rappresenta una misura, il sistema da risolvere diventa:

$$\begin{cases} 3x^2 \geq 0{,}7 \\ \underline{\hspace{3.5cm}} \leq 1{,}3 \\ x > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 \geq 0{,}23 \\ \underline{\hspace{4.5cm}} \leq 0 \\ x > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \underline{\hspace{2cm}} \vee \underline{\hspace{2cm}} \\ -0{,}80 \leq x \leq 0{,}57 \\ x > 0 \end{cases}$$

La soluzione del sistema è:

$$0{,}48 \leq x \leq 0{,}57.$$

Il lato del quadrato di base della lattina è quindi compreso tra 4,8 e 5,7 cm (circa).

2 Il convegno

Un'agenzia di pubbliche relazioni organizza un convegno in cui ogni partecipante preparerà una relazione di quattro pagine che deve essere consegnata in copia a tutti i partecipanti. Le spese che si devono sostenere sono: € 0,02 per ogni foglio fotocopiato o stampato; € 1,20 per la copertina di ogni fascicolo; € 5 per il lavoro di redazione per ogni relazione. Sono previsti inoltre € 200 di costi fissi complessivi. Il budget totale è di massimo € 2000; però, se partecipano almeno 30 persone, uno sponsor offre € 500 aggiuntivi.

▶ Quante persone possono partecipare al massimo, per non superare il budget?

▶ Indicato con n il numero dei partecipanti, calcoliamo i costi (espressi in euro):

$$\textit{per la carta} = 4 \cdot 0{,}02 \cdot \underline{\hspace{0.6cm}} = 0{,}08 \cdot \underline{\hspace{0.6cm}},$$

$$\textit{per la copertina} = 1{,}20 \cdot n^2,$$

$$\textit{per la redazione} = 5 \cdot \underline{\hspace{0.5cm}},$$

$$\textit{costi fissi} = 200.$$

Occorre risolvere i seguenti due sistemi (a seconda che i partecipanti siano meno di 30 o almeno 30), per tenere conto del budget aggiuntivo di € 500:

$$\begin{cases} 0,08\quad + 1,20n^2 + 5\quad + 200 \leq 2000 \\ \qquad \end{cases} \vee \begin{cases} 0,08\quad + 1,20n^2 + 5\quad + 200 \leq 2000 + 500 \\ \qquad \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 1,28n^2 + 5n - 1800 \leq 0 \\ \qquad \end{cases} \vee \begin{cases} 1,28n^2 + 5n - 2300 \leq 0 \\ \qquad \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} -39,5 \leq x \leq 35,7 \\ \qquad \end{cases} \vee \begin{cases} -44,4 \leq x \leq 40,5 \\ \qquad \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 \quad n \quad 29 \vee 30 \quad n \quad 40 \rightarrow 1 \leq n \leq 40.$$

I partecipanti al convegno possono essere pertanto   40.
Facciamo notare che, sebbene dal punto di vista matematico sia accettabile la soluzione $n = 1$, avrebbe ben poco senso organizzare un convegno con un solo partecipante.

3 Il biglietto dell'autobus

Una compagnia privata di autotrasporti urbani ha in media 4000 passeggeri al giorno, con il costo del biglietto fissato a € 1,00.
La società decide di aumentare il prezzo del biglietto. Secondo le informazioni a sua disposizione, per ogni incremento del biglietto di € 0,10 è prevista una perdita di 150 passeggeri al giorno.

- Determina il prezzo del biglietto che garantisce almeno l'incasso giornaliero attuale.
- Determina il prezzo del biglietto nel caso in cui la compagnia voglia aumentare del 20% l'incasso attuale.

- Per rispondere è meglio raccogliere in una tabella le informazioni a disposizione della compagnia.

Costo biglietto (€)	Numero passeggeri al giorno
1	4000
1,10	3850
1,20	3700
1,30	3550
… $1 + n \cdot 0{,}10$	… $4000 - n \cdot 150$

L'incasso giornaliero I è dato dal prodotto fra il costo del biglietto e il numero di passeggeri paganti:

$$I = (1 + n \cdot 0{,}10)(4000 - n \cdot 150);$$

l'incasso garantito dal biglietto al costo di € 1 è di € 4000.
Troviamo la soluzione risolvendo la seguente disequazione:

$$(1 + n \cdot 0{,}10)(4000 - n \cdot 150) \geq 4000 \rightarrow \qquad \leq 0 \rightarrow \quad \leq n \leq \quad .$$

Per $n = 0$ si ha la situazione di partenza con il biglietto al costo di € 1.
Per n che aumenta anche l'incasso aumenta rispetto a quello attuale di € 4000, fino a $n =$ in corrispondenza del quale il biglietto costa € 2,60, i passeggeri sono   e l'incasso è di € 4160.
Compilando la tabella degli aumenti, dei passeggeri e degli incassi, possiamo vedere che l'incasso massimo si ha per un biglietto di €   (passeggeri, € 5040 di incasso).

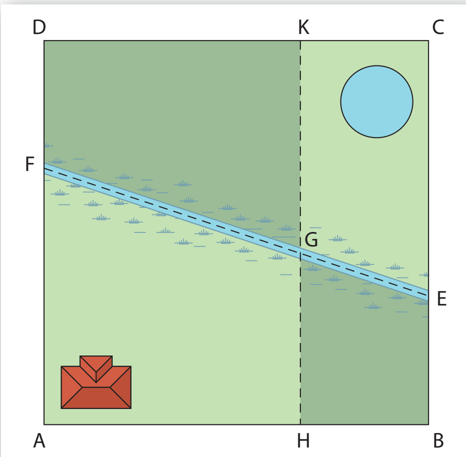
- L'incasso attuale di € 4000, se aumentato del 20%, diventa di ____.
Per assicurarsi questo incasso, deve essere:

$$(1 + n \cdot 0{,}10)(4000 - n \cdot 150) = \text{____} \quad \rightarrow \quad 3n^2 - 50n + 160 = 0 \quad \rightarrow \quad n \simeq \text{____} \quad \vee \quad n \simeq \text{____}.$$

Per aumentare di circa il 20% l'incasso basterebbe quindi aumentare il biglietto di circa ____ € oppure di ____ €. La compagnia può decidere di far pagare il biglietto € ____ e offrire il servizio a circa 3400 utenti oppure farlo pagare € ____ e perdere 1800 utenti!

4 Il parco

Un parco naturale ha forma quadrata, di circa 8 km di lato, ed è attraversato obliquamente da un torrente che divide i lati opposti in due parti, una doppia dell'altra. Nelle due parti separate dal torrente bisogna effettuare un'ulteriore suddivisione in due zone: una verrà lasciata a bosco (quella più scura nella figura), l'altra a prato. Nelle due aree a prato si trovano un laghetto circolare e il centro informazioni con annesso il museo. L'estensione del prato nella zona dove è presente il centro informazioni non può essere minore di quella con il laghetto. Il laghetto ha un diametro di circa 40 m e il centro informazioni-museo occupa circa 5000 m^2.



- Trova la misura delle parti nelle quali il parco resta diviso dal torrente.
- Trova la misura minima dell'area della zona che contiene il museo.
(**SUGGERIMENTO** Poni $\overline{AH} = x$, determina la misura di KG in funzione di x e calcola le aree delle diverse zone sempre in funzione di x.)

- Con semplici considerazioni geometriche si verifica che il torrente divide il parco in due parti tali che l'estensione della zona ____ (trapezio) è uguale all'estensione della zona ____ (trapezio). La superficie totale del parco è 64 km^2 quindi le due parti misurano ciascuna 32 km^2.

- I dati a disposizione sono:

$$\overline{DF} = \overline{EB} = \text{____}, \quad \overline{AF} = \overline{CE} = \text{____} = \text{____};$$

se poniamo $\overline{AH} = \overline{DK} = x$ allora $\overline{HB} = \overline{KC} = \text{____}$.
Le aree delle singole parti in cui resta suddiviso il parco sono le aree dei trapezi:

$$A_{DFGK} = \frac{(\text{____}) \cdot x}{2}; \qquad A_{AHGF} = \frac{(\text{____}) \cdot x}{2};$$

$$A_{HGEB} = \frac{\left(\frac{8}{3} + \overline{GH}\right) \cdot \text{____}}{2}; \qquad A_{KCEG} = \frac{\left(\frac{16}{3} + \overline{KG}\right) \cdot \text{____}}{2}.$$

La relazione da impostare è:

$$A_{AHGF} - 0{,}005 \geq A_{KGEC} - \pi \cdot (0{,}2)^2.$$

Per determinare $\overline{KG}$ tracciamo dal punto F la perpendicolare al lato BC che incontra KG nel punto N e il lato BC nel punto M, punto medio del segmento EC. I triangoli FNG e FME sono   e   , pertanto si può impostare la seguente proporzione:

$$\quad : NG = \quad : FN \quad \rightarrow \quad \frac{8}{3} : \overline{NG} = 8 : x \quad \rightarrow \quad \overline{NG} = \frac{x}{3}.$$

Allora:

$$\overline{KG} = \qquad = \qquad = \frac{8+x}{3}, \quad \overline{GH} = \frac{16-x}{3}.$$

Sostituiamo nella relazione impostata sopra (approssimiamo $\pi \cdot (0{,}02)^2 \simeq 0{,}001$):

$$\frac{\qquad\qquad}{2} - 0{,}005 \geq \frac{\qquad\qquad}{2} - 0{,}001 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad (32-x)\cdot x - 0{,}03 \geq (24+x)\cdot(8-x) - 0{,}006 \quad \rightarrow \quad 48x - 192{,}024 \quad 0 \quad \rightarrow \quad x \quad 4{,}0005.$$

La minima area richiesta si ha pertanto, approssimando, per $AH = 4$ km. In corrispondenza risulta:

$$A_{AHGF} = \frac{\qquad\qquad}{2} = \frac{28}{3}\cdot 2 = \frac{56}{3} \simeq 18{,}7 \text{ km}^2.$$