REALTÀ E MODELLI SCHEDA DI LAVORO

1 La spesa della signora Matilde

La signora Matilde non vuole spendere oltre il limite della propria pensione e per questo pianifica tutte le proprie spese. Ogni volta che si reca a fare la spesa sta attenta a non superare un certo importo.
Per la frutta fissa ogni volta € 5, ma in questo acquisto non possono mancare le banane, di cui è ghiotta, e un altro tipo di frutta che varia a seconda della stagione. Oggi vuole acquistare banane e pesche, e spera di poter comprare 2 kg di banane e 1,5 kg di pesche. Al mercato le banane sono vendute al prezzo di € 1,80 al kg e le pesche al prezzo di € 3,20 al kg, e quindi la signora Matilde deve ridimensionare i suoi propositi. È disposta a rinunciare a due pesche per una banana, in modo da comprare 1,3 kg di banane e 0,8 kg di pesche.

- Prova a ipotizzare una possibile funzione di utilità che la signora Matilde inconsapevolmente utilizza.
- Determina la soluzione che ottieni matematicamente.
- Confronta il risultato teorico con quello pratico.

- Indichiamo con x_1 la quantità di banane e con x_2 la quantità di pesche. Un modo per ipotizzare una funzione di utilità è quella di considerare $(2 - x_1)$ e $(1{,}5 - 2x_2)$ come le funzioni dell'utilità marginale dei due beni. Infatti per ogni unità di peso delle banane si rinuncia a due unità di peso delle pesche.
Dalle due funzioni $U'_{x_1} = 2 - x_1$ e $U'_{x_2} = 1{,}5 - 2x_2$ possiamo risalire alle funzioni di utilità dei due beni e addizionarle:

$$U(x_1; x_2) = \_\_\_\_\_\_\_\_.$$

- Determiniamo il ______ di $U(x_1; x_2)$ con il vincolo $g(x_1; x_2) =$ ______,
senza passare per l'impostazione del metodo dei moltiplicatori.
Da $\dfrac{2 - x_1}{1{,}5 - 2x_2} = \dfrac{1{,}8}{3{,}2}$ otteniamo $x_1 =$ ______; sostituendo nel vincolo $5 - 1{,}80x_1 - 3{,}20x_2 = 0$ otteniamo $x_1 =$ ______ e $x_2 =$ ______.
L' hessiano orlato conferma il ______:

$$\overline{H} = \begin{vmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{vmatrix} = \_\_ > 0.$$

- L'acquisto effettivo $x_1 = 1{,}3$, $x_2 = 0{,}8$ comporta una spesa di € ______ e un'utilità $U(1{,}3; 0{,}8) =$ ______.
Il ______ ottenuto matematicamente $x_1 =$ ______, $x_2 =$ ______ comporta una spesa di € ______ e una utilità $U($______; ______$) =$ ______.

2 **La pasticceria artigiana**

Una pasticceria artigiana, che produce mensilmente 1400 kg fra vari tipi di torte, pasticcini, salatini e brioche, ha alle proprie dipendenze quattro lavoratori il cui costo medio mensile è di € 2400 e utilizza per la produzione un'impastatrice e due forni, con un costo medio per ogni macchinario di € 2000 mensili. Per far fronte a un aumento della richiesta dei suoi prodotti, il proprietario deve decidere se aumentare il numero delle macchine (e quindi acquistare un altro forno o una nuova impastatrice) o assumere altri lavoratori o agire in entrambe le direzioni. Con l'aggiunta di forni o impastatrici più moderne il costo medio mensile per ogni macchina si ridurrebbe a € 1800, mentre l'assunzione di nuovi dipendenti porterebbe il costo medio mensile a € 2500. Il proprietario è disposto a sostenere un costo incrementale di € 6000. Il processo produttivo prevede due fasi distinte. Nella prima, i lavoratori impastano, lavorano il semilavorato e lo cuociono nel forno e la quantità media per ogni elemento produttivo è di 100 kg. Nella seconda fase, il prodotto uscito dal forno viene in parte inviato direttamente ai clienti e in parte subisce un'ulteriore lavorazione prima della distribuzione, e in questo caso il quantitativo della prima fase subisce un incremento di 50 kg per ogni lavoratore.

- ▶ Determina la funzione di produzione.
- ▶ Calcola il costo sostenuto.
- ▶ Determina se l'attuale situazione capitale-lavoro è migliorabile.
- ▶ Determina quale sarebbe la migliore struttura di capitale e lavoro con il nuovo possibile incremento.

▶ La funzione di produzione, tenendo conto dell'attività congiunta di capitale e lavoro nella prima fase, che si può indicare con il prodotto KL, e della sola fase di lavoro L nella seconda fase, può essere formulata nel seguente modo:

$$Q(K;L) = \underline{\quad}\,KL + \underline{\quad}\,L.$$

▶ La funzione del costo è $C = \underline{\qquad} + \underline{\qquad}$; se $K = 3$ e $L = 4$, allora $C = \underline{\qquad}$.

▶ Determiniamo il massimo della produzione di $Q(K;L)$ con il vincolo:

$$g(K;L) = \underline{\qquad} - \underline{\quad}\,K - \underline{\quad}\,L.$$

Utilizzando Lagrange abbiamo:

$$\begin{cases} \underline{\quad}\,L - \underline{\quad}\,\lambda = \underline{\quad} \\ \underline{\quad}\,K + \underline{\quad} - \underline{\quad}\,\lambda = \underline{\quad} \\ \underline{\quad}\,K + \underline{\quad}\,L = \underline{\qquad} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = \underline{\quad}\,L \\ K = \underline{\quad}\,L - \underline{\quad} \\ \underline{\quad}(\underline{\quad}\,L - \underline{\quad}) + \underline{\quad}\,L = \underline{\qquad} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} L = \underline{\quad} \\ K = \underline{\quad} \\ \lambda = \underline{\quad} \end{cases}$$

In corrispondenza vale $Q = \underline{\qquad}$.

L'hessiano orlato conferma il massimo:

$$\overline{H} = \begin{vmatrix} \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} \\ \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} \\ \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} \end{vmatrix} = \underline{\quad} \cdot 10^8 \; \underline{\quad} \; 0.$$

Il risultato ottenuto ($Q = \underline{\qquad}$) indica che l'attuale struttura è accettabile, anche perché le unità di K e di L devono essere numeri interi. Con $K = 3$ e $L = 4$ abbiamo il dato iniziale $Q = 1400$, mentre con $K = 4$ e $L = 3$ avremmo $Q = \underline{\qquad}$, cioè una produzione $\underline{\qquad}$.

▶ Il nuovo vincolo risulta, con l'incremento di € 6000 del costo complessivo e i nuovi costi per K e L:

$$g(K;L) = 21\,600 - 1800K - 2500L.$$

Utilizzando Lagrange abbiamo:

$$\begin{cases} \underline{\quad}\,L - \underline{\quad}\,\lambda = 0 \\ \underline{\quad}\,K + \underline{\quad} - \underline{\quad}\,\lambda = 0 \\ \underline{\quad}\,K + \underline{\quad}\,L = \underline{\qquad} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = \underline{\quad}\,L \\ K = \underline{\quad}\,L - \underline{\quad} \\ \underline{\quad}\left(\underline{\quad}\,L - \underline{\quad}\right) + \underline{\quad}\,L = \underline{\qquad} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} L = \underline{\quad} \\ K = \underline{\quad} \\ \lambda = \underline{\quad} \end{cases}$$

L'hessiano orlato conferma il …:

$$\overline{H} = \begin{vmatrix} \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \ldots \cdot 10^8 \ldots 0.$$

Con $K = 6$ e $L = 4$ risulta $Q = \ldots$. Con $K = 5$ e $L = 5$ è invece $Q = \ldots$.

3 I vasi di cristallo

Un'impresa produce vasi di cristallo che colloca in due mercati diversi che non si influenzano fra loro.

La legge di domanda adottata da questa impresa è $q = 6000 - \frac{100}{3}p$ e i costi fissi sono € 8000, mentre i costi variabili sono crescenti secondo la relazione $(0{,}02\,q + 80)$. Nel momento attuale l'impresa colloca 1000 vasi al prezzo di € 150.

Da un esame dei due mercati, che sono indicati con A e B, l'impresa ritiene che le leggi di domanda siano diverse e precisamente: per il mercato A, $q_1 = 16\,000 - 100p_1$; per il mercato B, $q_2 = 4000 - 20p_2$.

- Verifica che la situazione attuale è quella che consente il massimo guadagno.
- Determina quali sarebbero le quantità e i prezzi nei due mercati se si volesse diversificarli.
- Confronta la nuova possibile situazione con quella precedente.

- La funzione del costo è $C(q) = \ldots q^2 + \ldots q + \ldots$.
  Dalla legge di domanda otteniamo $p = \ldots - \ldots q$.
  La funzione del guadagno è $G(q) = \ldots q^2 + \ldots q - \ldots$, con $q \geq 0$, che presenta un massimo per $q = \ldots$ con $G(\ldots) = \ldots$ e $p = \ldots$.

- Per il mercato A abbiamo $p_1 = \ldots - \ldots q_1$ e per il mercato B è $p_2 = \ldots - \ldots q_2$.
  Tenendo presente che $q = q_1 + q_2$, la funzione dei costi è:

  $$C(q) = \ldots (q_1 + q_2)^2 + \ldots (q_1 + q_2) + \ldots.$$

  La funzione dei guadagni è:

  $$G(q_1; q_2) = (\ldots)q_1 + (\ldots)q_2 - \ldots(q_1 + q_2)^2 - \ldots(q_1 + q_2) - \ldots =$$
  $$= \ldots q_1^2 \ldots q_2^2 \ldots q_1q_2 \ldots q_1 \ldots q_2 \ldots.$$

  Con le condizioni necessarie, risolvendo il sistema:

  $$\begin{cases} G'_{q_1} = \ldots q_1 \ldots q_2 \ldots = 0 \\ G'_{q_2} = \ldots q_2 \ldots q_1 \ldots = 0 \end{cases}$$

  otteniamo $q_1 = \ldots$ con $p_1 = \ldots$ e $q_2^2 = \ldots$ con $p_2 = \ldots$.
  L'hessiano conferma il ….
  Il guadagno risulta di € 64 941,17.

- Diversificando i mercati, le nuove quantità addizionate danno un totale … al precedente e di conseguenza, con i nuovi prezzi tutti …, si avrebbe anche un guadagno maggiore. L'elemento che spinge il guadagno così in alto è che la somma delle leggi di domanda applicate ai mercati A e B, considerati unitariamente, è molto … a quella utilizzata attualmente. L'impresa è troppo ottimista o i suoi dati attuali non sono aggiornati.