# REALTÀ E MODELLI SCHEDA DI LAVORO

## 1 Orbita terrestre

Secondo la prima legge di Keplero, la Terra ruota intorno al Sole descrivendo un'orbita ellittica di cui il Sole occupa uno dei fuochi. Alcuni dati astronomici (approssimati) sono:

- eccentricità dell'orbita terrestre: 0,0167;
- perielio (minima distanza Terra-Sole): $147{,}1 \cdot 10^6$ km;
- afelio (massima distanza Terra-Sole): $152{,}1 \cdot 10^6$ km;
- diametro del Sole: $1392 \cdot 10^3$ km.

Posizionato il sistema di riferimento cartesiano in modo che il centro dell'orbita coincida con l'origine degli assi e il Sole abbia ascissa positiva e ordinata nulla,

- ▶ scrivi l'equazione dell'orbita terrestre;
- ▶ trova le coordinate del centro del Sole e dell'altro fuoco;
- ▶ confronta la distanza focale con la dimensione del Sole.

▶ Considerata l'equazione dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, possiamo trovare i seguenti elementi:

$$a = \frac{\text{afelio} + \underline{\qquad\quad}}{\underline{\quad}} = 149{,}6 \cdot 10^6 \text{ km} \quad \rightarrow \quad a^2 = 22\,380{,}16 \cdot 10^{12} \text{ km}^2,$$

semidistanza focale $c = \underline{\quad} \cdot a = 2{,}49832 \cdot 10^6 \text{ km}$,

$b^2 = \underline{\qquad\quad} = 22\,373{,}9184 \cdot 10^{12} \text{ km}^2$.

Perciò l'equazione dell'ellisse approssimata è $\frac{x^2}{22\,380} + \frac{y^2}{22\,374} = \underline{\qquad}$.

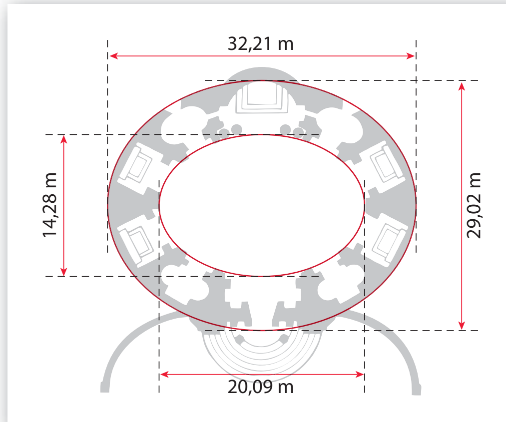
▶ I due fuochi hanno ascisse $\pm 2{,}498 \cdot \underline{\qquad}$ km $= \pm 2498 \cdot 10^3$ km.

▶ Il raggio del Sole è $696 \cdot 10^3$ km, la distanza tra i due fuochi è $\underline{\qquad\quad} \cdot 10^3 = \underline{\qquad\quad} \cdot 10^3$ km. La distanza tra i fuochi è quindi $\frac{\underline{\qquad}}{696} \simeq 7{,}18$ volte più grande del raggio del Sole.

Anche se l'______ è talmente piccola da rendere la traiettoria molto simile a una ______, i due fuochi sono abbastanza ______ (quasi ______ di kilometri!).

## 2 Una chiesa di Roma

La Chiesa di Sant'Andrea al Quirinale, costruita su progetto del Bernini tra il 1658 e il 1678, ha pianta ellittica: all'estremità dell'asse minore si trovano l'entrata e l'altare maggiore.
In questo disegno della pianta si evidenziano l'ellisse centrale, dove si dispongono i fedeli, e la fascia esterna con le varie cappelle.




- ▶ Scrivi le equazioni (approssimate) delle due ellissi riferite al loro centro. Le due ellissi sono omotetiche?
- ▶ Nello spazio delimitato dall'ellisse centrale, vengono sistemate le sedie per i fedeli in file parallele all'asse maggiore. Supponendo che lo spazio necessario per ogni sedia sia 60 cm in larghezza e 1 m nella direzione dell'asse minore, valuta quante sedie sono necessarie.
- ▶ In occasione di alcuni lavori di restauro, per non rovinare la pavimentazione, si stende un telo sull'intera base dell'ellisse centrale. Quale sarà l'area del telo utilizzato?

▶ Dal disegno si ottiene per l'ellisse ____ $a =$ ____ m e $b =$ ____ m, perciò l'equazione è (approssimando al centesimo i denominatori) $\frac{x^2}{\square} + \frac{y^2}{\square} = 1$.

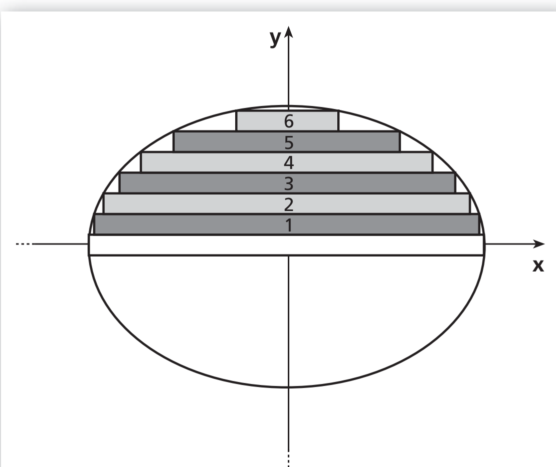
Inoltre $c^2 = \square^2 - \square^2 = 49,92$ e l'eccentricità $e = \square = \frac{\square}{10,045} \simeq 0,703$.

Per l'ellisse ____ $a =$ ____ m e $b =$ ____ m, perciò l'equazione è $\frac{x^2}{259,37} + \frac{y^2}{210,54} = 1$.

Inoltre $c^2 = \square^2 - \square^2 = 48,83$ e l'eccentricità $e = \square = \frac{\square}{16,105} \simeq 0,434$.

Avendo una diversa ____, le ellissi non sono ____

▶ Nel diametro ____ dell'ellisse centrale trovano posto ____ sedie, poiché ____ $: 0,60 \simeq 33,48$.
La semiellisse ____ può essere quindi suddivisa in ulteriori ____ file di sedie, ciascuna alta 1 m.




◀ **Figura 1**

Per trovare la ____ di ogni fila, intersechiamo l'ellisse con le rette di equazione $y = \square + k$, dove $k = 1, 2, \dots, 6$ (ricaviamo ____ dall'equazione dell'ellisse e sostituiamo successivamente i valori di $y$).

Quindi …… la lunghezza di ogni fila per 0,60 m (la …… di una sedia) in modo da determinare il …… di sedie che possono essere disposte in quella fila.

$$\frac{x^2}{100{,}98} + \frac{y^2}{50{,}98} = 1 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{100{,}98 \cdot \frac{50{,}98 - y^2}{50{,}98}} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \ldots \text{ fila} = 2x = 2\sqrt{100{,}98 \cdot \frac{50{,}98 - y^2}{50{,}98}},$$

$$k = 1 \quad \rightarrow \quad y = \ldots \quad \rightarrow \quad 2x \simeq \ldots \quad \rightarrow \quad \text{numero sedie} = \frac{\ldots}{0{,}60} = 32,$$

$$k = 2 \quad \rightarrow \quad y = \ldots \quad \rightarrow \quad 2x \simeq \ldots \quad \rightarrow \quad \text{numero sedie} = \frac{\ldots}{0{,}60} = 31,$$

$$k = 3 \quad \rightarrow \quad y = \ldots \quad \rightarrow \quad 2x \simeq \ldots \quad \rightarrow \quad \text{numero sedie} = \frac{\ldots}{0{,}60} = 29,$$

$$k = 4 \quad \rightarrow \quad y = \ldots \quad \rightarrow \quad 2x \simeq \ldots \quad \rightarrow \quad \text{numero sedie} = \frac{\ldots}{0{,}60} = 26,$$

$$k = 5 \quad \rightarrow \quad y = \ldots \quad \rightarrow \quad 2x \simeq \ldots \quad \rightarrow \quad \text{numero sedie} = \frac{\ldots}{0{,}60} = 21,$$

$$k = 6 \quad \rightarrow \quad y = \ldots \quad \rightarrow \quad 2x \simeq \ldots \quad \rightarrow \quad \text{numero sedie} = \frac{\ldots}{0{,}60} = 13.$$

Per trovare il numero …… di sedie basta …… i numeri precedenti, moltiplicarli per 2 e aggiungere le 33 sedie del diametro maggiore:

$$2 \cdot \ldots + 33 = 337.$$

▶ L'area del telo da utilizzare sarà pari all'area dell'ellisse di base:

$$A = \pi ab = \pi \cdot \ldots \cdot 7{,}14 \simeq 225{,}32 \text{ m}^2.$$

**3** **Si sussurra, ma si sente**

Nella St Paul's Cathedral, a Londra, c'è la famosa Whispering Gallery, una balconata interna a circa 30 m dal suolo che ha questa caratteristica: se si sussurra rivolti verso il muro, tale suono può essere udito chiaramente in un qualunque altro punto della galleria, purché si metta l'orecchio vicino al muro. In questo caso si sfruttano delle proprietà di acustica legate alle frequenze di un suono sussurrato; in qualsiasi stanza ellittica, però, si può verificare lo stesso fenomeno se chi emette il suono e chi lo riceve occupano la posizione dei fuochi.

▶ Elisa e Filippo si trovano in una sala ellittica il cui semiasse maggiore è 12 m e quello minore 7 m. Determina in quali posizioni si devono mettere per poter verificare la proprietà descritta.

▶ Fissato il sistema di riferimento cartesiano nel modo consueto, considera il punto $P$ dell'ellisse, nel primo quadrante, di ascissa 5, e verifica che le due rette passanti per $P$ e per i fuochi sono simmetriche rispetto alla normale all'ellisse in $P$.

▶ Fissato il sistema di riferimento nel centro della stanza, l'equazione dell'ellisse è:

$$\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{49} = 1$$

da cui $c = \ldots \simeq \ldots$ m. I due fuochi, e quindi le posizioni che devono occupare Elisa e Filippo, sono i punti $F_{1,2}(\ldots; 0)$.

▶ L'ordinata del punto $P$ del primo quadrante si trova sostituendo $x = \quad$ nell'equazione dell'ellisse e ricavando $y$:

$$\frac{\quad}{144} + \frac{y^2}{49} = 1 \quad \rightarrow \quad y = \frac{7}{12}\quad \simeq 6{,}4, \text{ perciò } P(\quad; 6{,}4).$$

Equazione della retta $PF_1$: $\dfrac{y - 6{,}4}{x - 5} = \dfrac{0 - 6{,}4}{\quad - 5} \quad \rightarrow \quad y = \quad x + 4{,}2.$

Equazione della retta $PF_2$: $\dfrac{y - 6{,}4}{x - 5} = \dfrac{0 - 6{,}4}{\quad - 5} \quad \rightarrow \quad y = \quad x + 13{,}2.$

Con la formula di sdoppiamento si ottiene la tangente in $P$:

$$\frac{5x}{144} + \frac{6{,}4y}{49} = 1 \quad \rightarrow \quad y = \quad x + \quad .$$

La normale in $P$ sarà quindi:

$$y - 6{,}4 = \quad (x - 5) \quad \rightarrow \quad y = \quad x - 12{,}1.$$

Per verificare che le rette $PF_1$ e $PF_2$ sono rispetto alla in $P$, basta verificare che una delle due degli angoli formati dalle rette coincide con la normale (e l'altra, ovviamente, con la ).
Equazione delle di $PF_1$ e $PF_2$:

$$\frac{|0{,}44x - y + 4{,}2|}{\sqrt{0{,}44^2 + 1}} = \frac{|1{,}36x + y - 13{,}2|}{\sqrt{1{,}36^2 + 1}}$$

da cui:

prima :
$(0{,}44x \quad y + 4{,}2) \cdot 1{,}69 = (1{,}36x \quad y - 13{,}2) \cdot 1{,}09$
$y = -0{,}27x + 7{,}7$ (equazione della in $P$);

seconda bisettrice:
$(0{,}44x \quad y + 4{,}2) \cdot 1{,}69 = -(1{,}36x \quad y - 13{,}2) \cdot 1{,}09$
$y = 3{,}7x - 12{,}1$ (equazione della in $P$).

Notiamo che dal punto di vista fisico ciò corrisponde a verificare la legge della , in quanto risultano gli angoli formati dalla retta in $P$ con le rette $PF_1$ (raggio ) e $PF_2$ (raggio ).