REALTÀ E MODELLI SCHEDA DI LAVORO

1 La tazzina di caffè

Nello scambio di calore tra un corpo, per esempio una tazzina di caffè, e l'ambiente, la temperatura del corpo cambia al variare del tempo, mentre possiamo considerare costante la temperatura dell'ambiente. La velocità di variazione della temperatura è proporzionale in ogni istante alla differenza di temperatura tra l'ambiente e il corpo.
La tazzina di caffè appena versato ha una temperatura di 67 °C, mentre l'ambiente di 20 °C; la costante di proporzionalità è 0,077 min^{-1}.

- ▶ Scrivi l'equazione differenziale che rappresenta la legge di raffreddamento.
- ▶ Trova la funzione che rappresenta la temperatura in funzione del tempo.
- ▶ Calcola in quanto tempo il caffè si raffredda, cioè raggiunge la temperatura ambiente.

▶ L'equazione che descrive il processo di raffreddamento in questo caso è:

$T'(t) = -\underline{\qquad} \cdot [T(t) - 20]$ con $T(0) = 67$ (il tempo è espresso in minuti).

▶ È un'equazione differenziale del ______ ordine a variabili ______:

$$\frac{dT}{dt} = \underline{\qquad\qquad\qquad} \to \frac{dT}{T-20} = \underline{\qquad\qquad} \to \int \frac{dT}{T-20} = \underline{\qquad\qquad} \to$$

$$\to \ln|T-20| = \underline{\qquad\qquad} \to T - 20 = e^{\underline{\qquad\qquad}} \to T = \underline{\qquad\qquad\qquad}.$$

Dato che $T > 20$, si è potuto eliminare il valore assoluto nell'argomento del ______.
Con la condizione iniziale si determina c:

$$67 = \underline{\quad} + 20 \to c = \ln 47 \simeq 3,85.$$

Perciò la funzione che descrive la variazione della temperatura della tazzina di caffè è:

$$T = \underline{\qquad\qquad\qquad}.$$

▶ La funzione tende asintoticamente a 20 °C al tendere di t ______. Possiamo però pensare che il caffè sia raffreddato quando raggiunge 21 °C, in tal caso si ha:

$$21 = \underline{\qquad\qquad\qquad} \to 1 = \underline{\qquad\qquad} \to \underline{\qquad\qquad} + 3,85 = 0 \to t = 50 \text{ minuti}.$$

2 Il paracadute

Nel momento in cui apre il paracadute, il paracadutista sta cadendo alla velocità di 180 km/h. Nella discesa a paracadute aperto si può ipotizzare che la resistenza dell'aria, cioè la forza che si oppone al moto di caduta, sia proporzionale al peso complessivo uomo-paracadute e al quadrato della velocità, con la costante di proporzionalità pari a $\frac{1}{36}\,\text{s}^2/\text{m}^2$. Il paracadutista ha una massa di 76 kg e il paracadute di 5 kg.

- ▶ Scrivi l'equazione differenziale modello della situazione descritta (supponi, per semplicità, che la velocità sia sempre maggiore di 6 m/s).
- ▶ Determina la velocità in funzione del tempo a partire dall'apertura del paracadute e rappresentane il grafico approssimato.
- ▶ Calcola il limite della funzione velocità per $t \to +\infty$.

▶ Applichiamo la seconda legge della dinamica ($F = ma$) considerando che le forze che agiscono sul sistema uomo-paracadute sono la forza peso totale diminuita della resistenza dell'aria:

$$m_{tot} \cdot a(t) = P_{tot} - \underline{\quad} \cdot P_{tot} \cdot v^2(t) \to m_{tot} \cdot a(t) = m_{tot} \cdot 9,81 - \underline{\quad} \cdot m_{tot} \cdot 9,81 \cdot v^2(t).$$

Ricordando che $a(t) = \dfrac{dv}{dt}$ e dividendo per m_{tot} otteniamo:

$$\frac{dv}{dt} = 9{,}81 - \underline{\qquad} v^2(t) \qquad \text{con } v(0) = 180 \text{ km/h} = 50 \text{ m/s}.$$

▶ Si tratta di un'equazione del _____ ordine a variabili _______:

$$\frac{dv}{dt} = 9{,}81 \cdot \left(\underline{\qquad\qquad} \right) \rightarrow \frac{dv}{\underline{\qquad\qquad}} = 9{,}81 \cdot dt \rightarrow \int \underline{\qquad\qquad} dv = \int 9{,}81 dt.$$

Il primo integrale si risolve con la decomposizione della frazione:

$$\underline{\qquad\qquad} = \frac{A}{\underline{\qquad}} + \frac{B}{\underline{\qquad}} = \frac{v(A-B) + 6A + 6B}{\underline{\qquad\qquad}} \rightarrow \begin{cases} A - B = 0 \\ 6A + 6B = 1 \end{cases} \rightarrow A = B = \frac{1}{12}.$$

Il primo integrale allora diventa:

$$\int \underline{\qquad\qquad} dv = 36 \left[\int \underline{\qquad\qquad} dt + \int \underline{\qquad\qquad} dt \right] = 3 \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} = \ln\left(\frac{6+v}{v-6}\right)^3 + c.$$

Nella soluzione abbiamo tolto il valore assoluto perché consideriamo $v > 6$ m/s.
L'equazione differenziale diventa perciò:

$$\ln\left(\frac{6+v}{v-6}\right)^3 = \underline{\qquad} + c \rightarrow \left(\frac{v+6}{v-6}\right)^3 = e^{9{,}81t+c} \rightarrow \frac{v+6}{v-6} = \underline{\qquad\qquad} \rightarrow$$

$$\rightarrow \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \rightarrow \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \rightarrow v = 6 \cdot \underline{\qquad\qquad}.$$

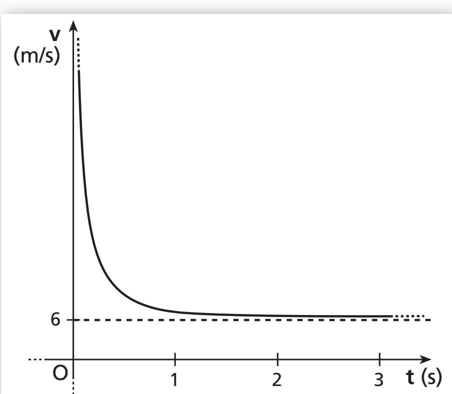
Per ricavare il valore della costante c poniamo la condizione iniziale:

$$v(0) = 50 \rightarrow 50 = \underline{\qquad\qquad} \rightarrow 25e^{\frac{c}{3}} - 25 = \underline{\qquad\qquad} \rightarrow e^{\frac{c}{3}} = \underline{\qquad} \rightarrow c = \underline{\qquad\qquad} \simeq 0{,}72.$$

Quindi la velocità in funzione del tempo è data da:

$$v(t) = 6 \cdot \underline{\qquad\qquad}.$$

Il grafico della funzione velocità è il seguente.



◀ **Figura 1**

▶ $\lim\limits_{t \to +\infty} 6 \cdot \underline{\qquad\qquad} = 6.$

Si nota che la velocità si stabilizza intorno a 6 m/s (21,6 km/h).
Usando la formula della caduta libera:

$$v = \sqrt{2gs} \;\rightarrow\; s = \frac{v^2}{2g} = \frac{36}{2 \cdot 9{,}81} = 1{,}83 \text{ m},$$

si può dire che arrivando a terra con il paracadute si ha lo stesso impatto che si avrebbe buttandosi a terra da un muretto alto   .

3 Quanto sale rimane?

In un esperimento di chimica si versa attraverso un foro, in un contenitore cilindrico contenente 30 litri di acqua distillata, una soluzione salina al 35% (in ogni litro di soluzione sono disciolti 350 g di sale). La velocità di versamento è di 1,5 litri/min. La miscela così ottenuta, mantenuta uniforme mescolando per tutto il tempo, esce da un secondo foro posto all'estremità inferiore del contenitore, con la stessa velocità con cui viene versata la soluzione salina.

▶ Determina la quantità di sale nel recipiente dopo 5 minuti; 30 minuti; 1 ora.

▶ La variazione del peso del sale nell'unità di tempo è data dalla quantità fissa che entra diminuita della quantità di sale che esce.
La quantità che entra in ciascun minuto è:

$$0{,}35 \frac{\text{kg}}{\text{litro}} \cdot 1{,}5 \text{ litri/ min} = 0{,}525 \text{ kg/ min}.$$

La quantità che esce è proporzionale alla massa m del sale all'istante t, con costante di proporzionalità:

$$k = 1{,}5 \frac{\text{litri}}{\text{min}} \cdot \frac{1}{30 \text{ litri}} = 0{,}05 \text{ min}^{-1}.$$

La quantità di sale nel recipiente dopo t minuti si ottiene risolvendo la seguente equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea:

$$m' = \qquad$$

con:

$$a(t) = \qquad \text{ e } \quad b(t) = \qquad .$$

Applichiamo la formula risolutiva per il calcolo dell'integrale generale:

$$m(t) = e^{-\int a(t)\,dt} \cdot \left[\int b(t) \cdot e^{\int a(t)\,dt}\,dt + c\right] \rightarrow m(t) = \qquad \rightarrow$$

$$\rightarrow m(t) = \qquad \rightarrow m(t) = \qquad \rightarrow$$

$$\rightarrow m(t) = 10{,}5 + c \cdot e^{-0{,}05t}.$$

Per determinare la costante c basta osservare che all'istante iniziale ($t = 0$) è $m(0) = 0$, da cui:

$$0 = 10{,}5 + \qquad \rightarrow 0 = 10{,}5 + c \rightarrow c = -10{,}5 \rightarrow m(t) = \qquad .$$

▶ Dopo $t = 5$ minuti nel recipiente sono contenuti:

$$m(5) = \qquad = 2{,}32 \text{ kg di sale.}$$

▶ Dopo $t = 30$ minuti nel recipiente sono contenuti:

$$m(30) = \qquad = 8{,}16 \text{ kg di sale.}$$

▶ Dopo $t = 1$ ora $= 60$ minuti nel recipiente sono contenuti:

$$m(60) = \qquad = 9{,}98 \text{ kg di sale.}$$

4 **La forza d'interesse!**

I regimi finanziari possono essere descritti analizzando come cresce nel tempo il capitale investito. Per studiare questo andamento si considera l'«intensità istantanea d'interesse», o «forza d'interesse», $\delta(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$. La forza d'interesse individua in modo univoco la legge di capitalizzazione utilizzata nell'investimento, in particolare individua il «fattore di montante» $f(t)$ associato alla legge: il montante maturato su un capitale C in un tempo t è dato da $C \cdot f(t)$.

Nel caso particolare della forza d'interesse $\delta(t) = \frac{3t^2}{2+t^3}$:

- determina il fattore di montante $f(t)$ associato (considera che $f(0) = 1$ e $f(s) > 0 \; \forall s \geq 0$);
- calcola il montante dopo 3 anni di un capitale C di 500 euro con il regime $f(t)$ trovato al punto precedente.

- Per trovare il fattore di montante associato alla forza di interesse $\delta(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$ si integrano entrambi i membri sull'intervallo $[0; t]$ perché il capitale si investe a partire dall'istante 0 per un periodo t.

$$\int_0^t \delta(s)\, ds = \int_0^t \frac{f'(s)}{f(s)}\, ds = [\ln f(s)]_0^t = \ln f(t) - \ln f(0) = \ln f(t) \text{ perché } f(0) = 1.$$

In questo caso, essendo $\delta(t) = \frac{3t^2}{2+t^3}$, si ha:

$$\int_0^t \delta(s)\, ds = \quad = \quad = \quad = \ln \frac{2+t^3}{2}.$$

Quindi:

$$\int_0^t \delta(s)\, ds = \ln f(t) \;\rightarrow\; \ln \frac{2+t^3}{2} = \quad \;\rightarrow\; f(t) = \quad \;\rightarrow\; f(t) = \quad .$$

- Dopo $t = 3$ anni sul capitale $C = 500$ € è maturato il montante:

$M = C \cdot f(t) = 500 \cdot f(3) = \quad = 7250$ €.