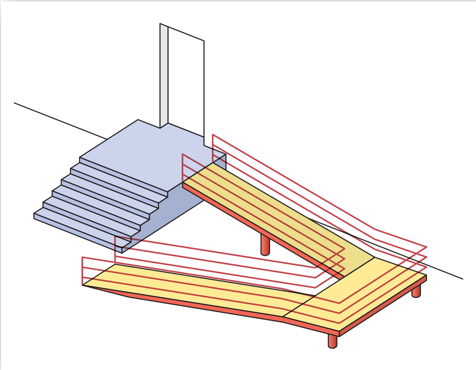
REALTÀ E MODELLI SCHEDA DI LAVORO

1 **La rampa di accesso**

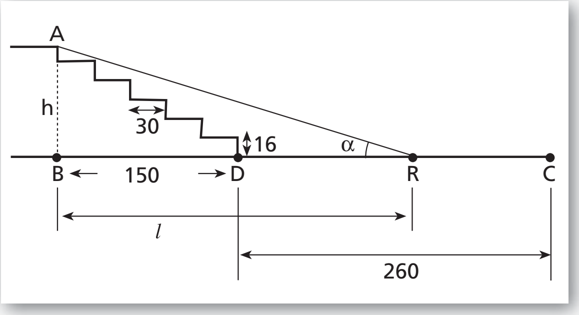
Per accedere a un edificio pubblico ci sono 6 gradini alti 16 cm e profondi 30 cm; è necessario costruire una rampa di accesso per carrozzine. La normativa prevede che la massima pendenza (ovvero il rapporto tra lo spostamento verticale e quello orizzontale) delle rampe sia dell'8%.



- Qual è il massimo angolo che una rampa può formare con l'orizzontale?
- Lo spazio disponibile di fronte alla base della scala è di 260 cm. Una rampa che costeggia la scala occupando tutto lo spazio a essa antistante è a norma?
- Lungo la parete dell'edificio di fianco alla scala si può costruire una rampa doppia, come in figura (ciascuna delle due rampe si può sviluppare, in orizzontale, per 650 cm). In questo modo risulta a norma? Di quanto risulta inclinata?

(**SUGGERIMENTO** In un triangolo ABC rettangolo in B, si ha $\overline{AB} = \overline{BC} \cdot \operatorname{tg} A\widehat{C}B$.)

- Sia h l'altezza cui arriva la rampa, l la lunghezza in orizzontale e α l'angolo formato dalla rampa con l'orizzontale (la lunghezza della rampa è perciò $\sqrt{h^2 + l^2}$). Secondo la normativa deve essere $\frac{h}{l}$ ▭ 8%; nel triangolo rettangolo si ha $h = l \cdot$ ▭, che sostituito nella relazione precedente dà $\operatorname{tg}\alpha \leq$ ▭, da cui si ottiene $\alpha \leq 4,57°$(con α positivo).



◀ **Figura 1**

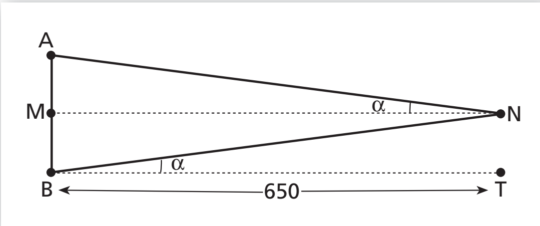
- Sulla base della figura 1 si ha $\overline{AB} = 6 \cdot 16 = 96$ cm, $\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{DC} = 5 \cdot 30 + 260 = 410$ cm.
  Nell'ipotesi di minor pendenza, in cui $R \equiv C$, si ha:

  $$\operatorname{tg}\alpha = \square \simeq 0,23 \rightarrow \alpha \simeq \operatorname{arctg} 0,23 = 13°.$$

  In tal caso, quindi, la rampa non risulta a norma.
- Sulla base della figura 2 e dei dati noti si ha $\overline{AB} = 96$ cm, $\overline{BT} = \overline{MN} = 650$ cm, $T\widehat{B}N = M\widehat{N}A = \alpha$ e deve essere $\overline{NT} + \overline{AM} = 96$ cm ovvero:

  $$(650 \cdot \square) \cdot 2 = 96 \rightarrow \square = \frac{96}{1300} \rightarrow \square \simeq 4,22°.$$

In questo modo la rampa risulta a norma.



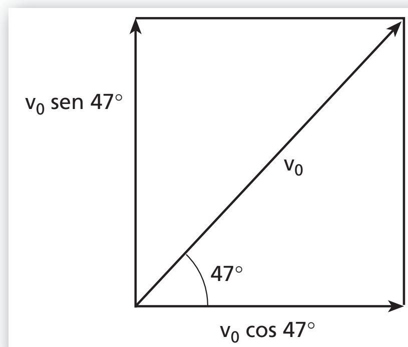
◀ **Figura 2**

2 Il gioco del calcio

In una partita di calcio amatoriale, un giocatore colpisce il pallone imprimendogli una velocità v_0 a 47° rispetto all'orizzontale; dopo 3 secondi il pallone raggiunge l'altezza di circa 4,5 metri.

- Scrivi la funzione che esprime la traiettoria del pallone e qual è l'altezza massima che può raggiungere.
- Se il pallone viene colpito con una velocità iniziale di circa 27,2 m/s e dopo 3 s raggiunge l'altezza di 14,5 m, qual è l'angolo che il vettore velocità iniziale forma con l'orizzontale?
- Se con i dati precedenti il pallone finisce fuori campo, di quanto dovrebbe essere l'angolo impresso alla palla da un giocatore posto a metà campo affinché il pallone ricada dentro il campo? (Lunghezza standard del campo = 105 m.)

(**SUGGERIMENTO** In un triangolo ABC rettangolo in B, si ha $\overline{AB} = \overline{AC} \cdot \operatorname{sen} A\widehat{C}B$ e $\overline{BC} = \overline{AC} \cdot \cos A\widehat{C}B$.)



▲ **Figura 3**

- Dalla fisica sappiamo che il moto, in questo caso parabolico, si scompone in due componenti:
  moto rettilineo uniforme lungo l'asse x:

$$x(t) = v_0 \cos(47°) \cdot t,$$

moto uniformemente accelerato lungo l'asse y:

$$y(t) = v_0 \operatorname{sen}(47°) \cdot t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Utilizzando l'informazione che dopo 3 s il pallone raggiunge l'altezza di 4,5 m si può ricavare la velocità iniziale v_0. Infatti sostituendo nella seconda equazione si ha:

$$\square = v_0 \cdot \square - \square \quad \rightarrow \quad v_0 = 22,19 \text{ m/s}.$$

Per trovare la funzione che esprime il moto si ricava ___ dalla prima equazione (perché lineare e quindi più semplice) e si sostituisce l'espressione trovata nella seconda equazione:

$$\square = \frac{x}{22,19 \cdot \square}, \quad y = \square \cdot x - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot \left[\square \right]^2.$$

Svolgendo i calcoli si ottiene la funzione $y = 1,072 \cdot x - 0,021 \cdot x^2$ il cui grafico è una ___ con ___ rivolta verso il ___. L'altezza massima si ha in corrispondenza del valore x del ___ della ___ $\simeq 25,52$, quindi il massimo raggiunto è ___ $\simeq 13,68$ m.

- Indichiamo con α l'angolo che il vettore velocità iniziale forma con l'asse y. Si ha allora:

$$y(t) = 27,2 \operatorname{sen} \alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Sostituendo i dati noti si ha:

$$\square = 27,2 \operatorname{sen} \alpha \cdot 3 - 4,9 \cdot 9 \quad \rightarrow \quad \operatorname{sen} \alpha = \frac{14,5 + 44,1}{81,6} \simeq 0,718 \quad \rightarrow \quad \alpha = \square \simeq \square.$$

► Valutiamo la gittata nel caso di angolo iniziale α e velocità iniziale 27,2 m/s:

$$\boxed{} = 27{,}2 \cdot \cos\alpha \cdot t, \quad \boxed{} = 27{,}2 \cdot \operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{2}gt^2, \text{ da cui:}$$

$$\boxed{} = \frac{x}{27{,}2 \cdot \cos\alpha} \;\rightarrow\; y = \operatorname{tg}\alpha \cdot x - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot \left[\boxed{}\right]^2.$$

Ponendo uguale a zero la quota y in quest'ultima equazione si ottiene $x = 0$ (punto di lancio) e

$x = \dfrac{2 \cdot (27{,}2)^2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}{9{,}8} \simeq 151 \cdot \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha$ (gittata espressa in funzione di α).

Se l'angolo di tiro è $\alpha \simeq 46°$ allora $\operatorname{sen}\alpha \simeq 0{,}718$ e $\cos\alpha \simeq 0{,}70$.

Sostituendo nell'equazione della gittata si trovano $x = \boxed{}$, che corrisponde al punto in cui il pallone ________ ____, e $x = \boxed{}$ m che è «fuori campo» (infatti se la lunghezza standard del campo è circa 105 m, la metà è circa 52,5 m).
Poiché il pallone deve rimanere dentro al campo, tirando da metà campo, dovrà essere:

$$151 \cdot \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha \;\boxed{}\; 52{,}5 \;\rightarrow\; \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha \;\boxed{}\; \frac{52{,}5}{151} \;\rightarrow\; 2 \cdot \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha \;\boxed{}\; 0{,}70 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \operatorname{sen}(2\alpha) \;\boxed{}\; 0{,}70 \;\rightarrow\; 2\alpha \;\boxed{}\; \arcsin(0{,}70) \;\rightarrow\; 2\alpha \;\boxed{}\; 44° \text{ circa.}$$

Quindi $\alpha \;\boxed{}\; 22°$ circa.

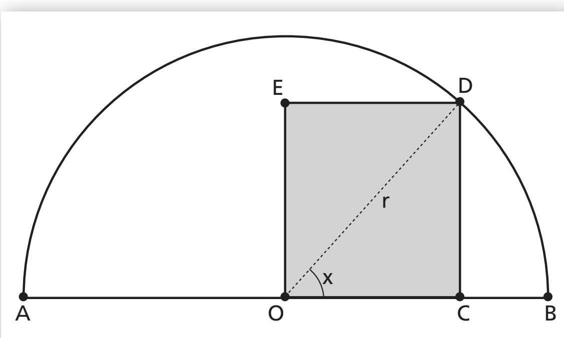
3 La galleria

Un autocarro transita, sulla sua corsia di marcia, attraverso una galleria di sezione semicircolare di raggio 6 m.

► Determina l'area di ingombro massima che l'autocarro può avere (intesa come l'area della sezione trasversale del veicolo).

(**SUGGERIMENTO** Ricorda le formule del triangolo rettangolo date nel problema precedente.)

► Schematizziamo la situazione con la seguente figura.



◄ **Figura 4**

L'area da calcolare è rappresentata dalla superficie del rettangolo $OCDE$ (il veicolo rimane su una sola corsia, quindi può occupare solo la corsia di sua pertinenza). Esprimiamo i lati della figura in funzione dell'angolo $D\widehat{O}C = x$:

$$\overline{CD} = \boxed{}; \qquad \overline{OC} = \boxed{};$$

$$Area = \overline{CD}\cdot\overline{OC} = \qquad \cdot \qquad = r^2 \qquad\qquad = \frac{1}{2}r^2 \qquad .$$

Il valore di $\qquad$ è massimo quando $\qquad = 1$ cioè $\quad = \frac{\pi}{2} \rightarrow \quad = \frac{\pi}{4}$, dal quale si ricava:

$$\overline{CD} = \qquad = 6\cdot \qquad \simeq 4{,}24\ \text{m};$$

$$\overline{OC} = \qquad = 6\cdot \qquad \simeq 4{,}24\ \text{m};$$

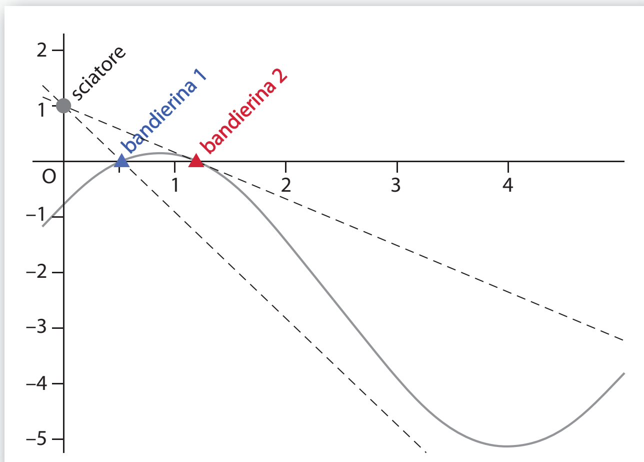
$$Area = \overline{CD}\cdot\overline{OC} = (4{,}24)^2\ \text{m}^2 \simeq 17{,}98\ \text{m}^2.$$

L'area massima della superficie della sezione del rimorchio corrisponde a una sezione quadrata di circa 18 m^2.

4 La pista di sci

Nella prima parte di un percorso di slalom alcune bandierine sono posizionate lungo la traiettoria come mostrato in figura.
Supponendo che la curva in figura abbia equazione $y = 2\,\text{sen}\,x + \sqrt{3}\cos x - \frac{5}{2}$ e che lo sciatore si trovi in $A(0; 1)$, determina:

- la posizione delle bandierine;
- l'equazione della traiettoria rettilinea da seguire per passare all'esterno della prima bandierina;
- le equazioni delle possibili traiettorie rettilinee per passare tra la prima e la seconda bandierina.



- Per determinare la posizione delle bandierine bisogna risolvere l'equazione:

$$2\,\text{sen}\,x + \sqrt{3}\cos x - \frac{5}{2} = \quad .$$

Risolviamo l'equazione applicando le formule parametriche:

$$2 \qquad + \sqrt{3} \qquad - \frac{5}{2} = \quad$$

$$\frac{8t + 2\sqrt{3}\,(1 - t^2) - 5 \qquad}{2 \qquad} = \quad$$

$$(5 + 2\sqrt{3})\,t^2 - 8t + 5 - 2\sqrt{3} = \quad$$

$$t = \qquad = \begin{cases} t_1 = \qquad \\ t_2 = \qquad \end{cases}$$

Sostituendo i valori di t nella formula parametrica del seno si ottiene:

$$\operatorname{sen} x = \square = \begin{cases} = \dfrac{1}{2} \to x = \dfrac{\pi}{6} \simeq 0{,}52 \ \ (x = 30°) \\ = \dfrac{13}{14} \to x \simeq 1{,}19 \ \ (x \simeq 68°) \end{cases}$$

Le coordinate delle due bandierine saranno quindi:

$$B_1\left(\square; 0\right), B_2(\square; 0).$$

▶ Per determinare l'equazione della traiettoria rettilinea per passare all'esterno della prima bandierina scriviamo l'equazione della retta passante per i punti:

$$A(0; 1), \qquad B_1\left(\frac{\pi}{6}; 0\right) \quad \to \quad y = -\frac{6}{\pi}x + 1.$$

Quindi lo sciatore passerà all'esterno di B_1 per tutte le traiettorie di equazione $y = mx + 1$ con $m \ \square - \frac{6}{\pi}$, ovvero con $m \ \square - 1{,}91$.

▶ Determiniamo l'equazione della retta passante per A e B_2:

$$A(0; 1), \qquad B_2(1{,}19; 0) \quad \to \quad y = -\,0{,}84x + 1.$$

Lo sciatore passerà attraverso le due bandierine se il coefficiente angolare della traiettoria $y = mx + 1$ verifica la condizione:

$$\square < m < \square.$$