

REALTÀ E MODELLI

SCHEDA DI LAVORO

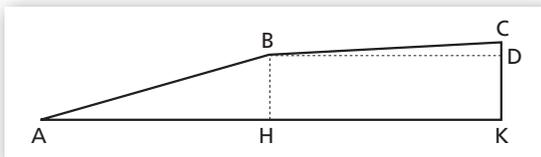
1 La strada in salita

Alcune strade di San Francisco hanno una notevole pendenza e inoltre sono rettilinee, senza curve. In una strada il cartello indica una pendenza del 15% per 800 m e successivamente dell'11% per altri 800 m.

- ▶ Al termine della strada, di quanto si è saliti in quota?
- ▶ Se per tutto il percorso la strada avesse avuto la stessa pendenza, quanto dovrebbe segnalare il cartello iniziale?

(SUGGERIMENTO In un triangolo ABC rettangolo in B , si ha $\frac{BC}{AB} = \text{tg} \widehat{CAB}$ e $\overline{BC} = \overline{AC} \cdot \text{sen} \widehat{CAB}$.)

- ▶ La pendenza della strada corrisponde al rapporto tra il dislivello verticale e la distanza in orizzontale, ovvero, per il suggerimento dato, alla tangente dell'angolo di elevazione della strada.



◀ Figura 1

Con riferimento alla figura 1 si ha $\overline{AB} = \square$ m, $\overline{BC} = \square$ m, $\text{tg}(\widehat{BAH}) = 0,15$, $\text{tg}(\widehat{CBD}) = \square$.
Si ottiene quindi:

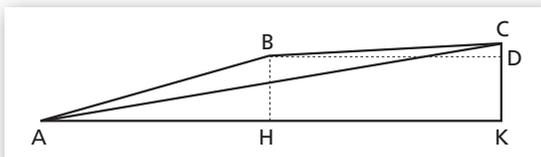
$$\overline{BH} = \overline{BA} \cdot \square (\widehat{BAH}) = 800 \cdot \sqrt{\frac{\text{tg}^2 \square}{1 + \square}} = 800 \cdot \sqrt{\square} \simeq 118,67 \text{ m},$$

$$\overline{CD} = \square \cdot \text{sen}(\widehat{CBD}) = \square \cdot \sqrt{\frac{\square}{1 + \square}} = \square \cdot \sqrt{\square} \simeq 87,47 \text{ m}.$$

Il dislivello totale è perciò $\overline{CK} = \square \simeq 206,14$ m.

- ▶ Se la strada seguisse il tratto AC , la pendenza corrisponderebbe a:

$$\text{tg}(\widehat{CAK}) = \square.$$



◀ Figura 2

Per il calcolo di \overline{AK} ricordiamo che:

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{BA}^2 - \overline{BH}^2} = \sqrt{\square} \simeq \square \text{ m},$$

$$\overline{HK} = \overline{BD} = \sqrt{\square} = \sqrt{\square} \simeq 795,20 \text{ m},$$

e quindi $\overline{AK} = \overline{AH} + \overline{HK} \simeq \square = \square$ m.

La tangente dell'angolo \widehat{CAK} risulta perciò:

$$\text{tg}(\widehat{CAK}) = \square = \square \simeq 0,13.$$

Nel passaggio diretto da A a C c'è una pendenza del \square circa.

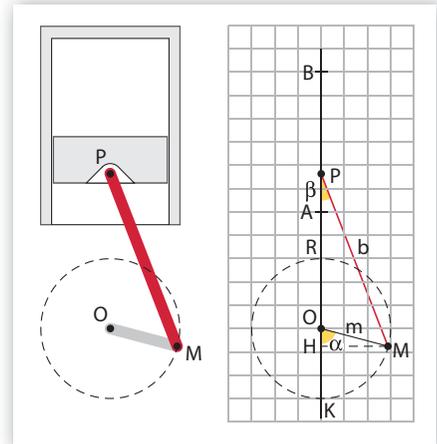
2 La biella-manovella

La biella è un'asta (MP) di collegamento tra due parti di una macchina, alle quali è incernierata; ha la funzione di trasformare il moto rotatorio continuo della manovella OM nel moto rettilineo alterno del punto P che può essere collegato a un pistone; in tal caso si parla di «meccanismo biella-manovella».

Indichiamo con m la lunghezza della manovella OM e con b la lunghezza della biella MP , con α e β gli angoli formati dalla manovella e dalla biella con la verticale; A e B identificano le posizioni estreme del punto P variabile.

- ▶ Trova quanto vale l'ampiezza del moto del punto P .
- ▶ Trova la relazione tra m , b , α e β .
- ▶ Calcola la distanza OP in funzione di α quando P si trova in una posizione qualsiasi tra A e B (come in figura).

(SUGGERIMENTO In un triangolo ABC rettangolo in B , si ha $\overline{BC} = \overline{AC} \cdot \text{sen } \widehat{CAB}$ e $\overline{AB} = \overline{AC} \cdot \text{cos } \widehat{CAB}$.)



- ▶ Per fissare le idee, supponiamo che inizialmente P si trovi in A , perciò $\overline{PM} = \overline{KA} = 2 \cdot \overline{OR} + \overline{RA}$. Nell'altra posizione estrema P si trova in B ed M in \overline{KB} , quindi $\overline{RB} = \overline{KB} - \overline{RM}$, perciò $\overline{AB} = \overline{RB} - \overline{RA}$.
- ▶ Nel triangolo OHM si ha $\overline{HM} = m \cdot \text{sen } \alpha$ mentre nel triangolo PHM si ha $\overline{HM} = \overline{PM} \cdot \text{sen } \beta$, perciò la relazione richiesta è $m \text{sen } \alpha = \overline{PM} \text{sen } \beta$ ovvero:

$$\beta = \arcsin\left(\frac{m}{b} \text{sen } \alpha\right).$$

- ▶ $\overline{OP} = \overline{OA} - \overline{HO} = \overline{PM} \cdot \text{cos } \beta - m \cdot \text{cos } \alpha = b \cdot \text{cos } \beta - m \cdot \text{cos } \alpha$ ovvero:
 $\overline{OP} = \sqrt{b^2 - m^2 \text{sen}^2 \alpha} - m \text{cos } \alpha$.

3 Il gioco del golf

Una pallina da golf viene lanciata con una velocità iniziale v_0 m/s; la traiettoria iniziale forma un angolo α con il terreno, orizzontale. Se la distanza che la pallina riesce a raggiungere è espressa dalla relazione

$$d = \frac{2(v_0)^2 \text{sen } \alpha \text{ cos } \alpha}{g} \quad (g \text{ è costante e vale } 9,8 \text{ m/s}^2):$$

- ▶ come si può esprimere la distanza d in funzione dell'angolo 2α ?
- ▶ Quanto vale l'angolo α se la velocità iniziale è di 40 m/s e la distanza raggiunta è di 83 m?

- ▶ Sostituendo $2 \text{sen } \alpha \text{ cos } \alpha$ con l'espressione equivalente $\text{sen } 2\alpha$ otteniamo:

$$d = \frac{2(v_0)^2 \text{sen } \alpha \text{ cos } \alpha}{g} = \frac{(v_0)^2 \text{sen } 2\alpha}{g}.$$

- ▶ Sostituendo i dati $v_0 = 40$ e $d = 83$ nella relazione precedente otteniamo:

$$83 = \frac{40^2 \text{sen } 2\alpha}{9,8} \rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \cdot \arcsin\left(\frac{83 \cdot 9,8}{40^2}\right) \simeq 15^\circ.$$

4 La finestra basculante

La signora Ada vuole far montare, nella sua mansarda, finestre che si aprono a ribalta, come in figura. Le dimensioni sono di 1,10 m di larghezza per 1 m di altezza, e il vincolo intorno al quale ruota si trova a 40 cm dal davanzale. L'installatore le dice che normalmente l'angolo formato dalla finestra aperta con lo stipite verticale è di 20°. La signora Ada pensa che in tal modo la finestra si apra troppo poco e chiede che l'apertura sia doppia. Il tecnico le risponde che allora bisogna raddoppiare l'angolo.

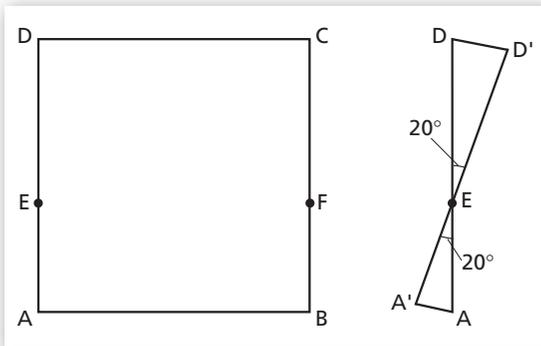


Il tecnico ha detto una cosa corretta? Per capirlo, segui queste indicazioni:

- ▶ Il tecnico ha detto una cosa corretta? Per capirlo, segui queste indicazioni:
- rappresenta con un disegno la finestra aperta vista di lato;
- calcola la distanza degli spigoli della finestra e dello stipite, con la finestra aperta di 20°, sia nella parte superiore che inferiore;
- che cosa succede raddoppiando l'angolo?

(SUGGERIMENTO Considera che, in una circonferenza di raggio r , la corda AB sottesa a un angolo alla circonferenza α misura $AB = 2r \cdot \sin \alpha$.)

▶ La figura rappresenta la finestra chiusa vista di fronte e aperta vista di lato.



◀ Figura 3

▶ Gli angoli $\widehat{DED'}$ e $\widehat{AEA'}$ sono di 20°; i segmenti DD' e AA' (che rappresentano l'apertura della finestra) sono corde di due circonferenze di raggio rispettivamente 60 cm e 40 cm, si possono perciò calcolare con il suggerimento fornito tenendo conto che l'angolo alla circonferenza corrispondente è di 40°:

$$\overline{DD'} = 2 \cdot 60 \cdot \sin 20^\circ \simeq 20,8 \text{ cm};$$

$$\overline{AA'} = 2 \cdot 40 \cdot \sin 20^\circ \simeq 27,2 \text{ cm}.$$

▶ Raddoppiando l'angolo non raddoppia la lunghezza della corda dato che, se la prima corda è $2r \cdot \sin \alpha$, l'altra sarà $2r \cdot \sin 2\alpha = 4r \cdot \sin \alpha \cos \alpha$.
Con l'angolo di apertura di 40° si ha infatti:

$$\overline{DD'} = 2 \cdot 60 \cdot \sin 40^\circ \simeq 41,0 \text{ cm}; \quad \overline{AA'} = 2 \cdot 40 \cdot \sin 40^\circ \simeq 51,5 \text{ cm}.$$

Per ottenere l'apertura voluta da Ada, pari a 41,0 cm nella parte superiore, l'angolo α deve essere tale che:

$$2 \cdot 60 \cdot \sin \alpha = 41,6 \rightarrow \alpha = 2 \cdot \arcsin \left(\frac{41,6}{120} \right) \simeq 40,57^\circ.$$

Le differenze fra gli angoli di 40° e 40,57° e le corrispondenti aperture sono quindi piccole e, per l'applicazione in esame, si commette un errore trascurabile optando per l'apertura di 40° della finestra.