REALTÀ E MODELLI SCHEDA DI LAVORO

1 La ruota panoramica

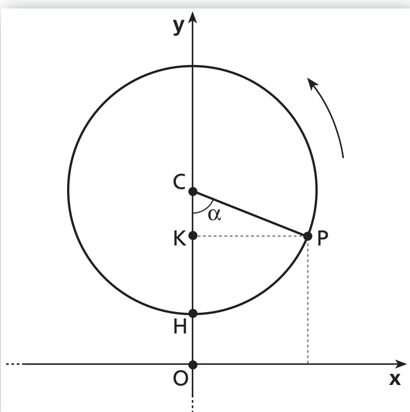
Nel 1897 fu costruita a Vienna la Riesenrad, una ruota panoramica alta 65 metri tuttora esistente e in funzione, in occasione delle celebrazioni dei 50 anni di regno dell'imperatore Francesco Giuseppe I. Il punto più basso dista da terra 4 metri e impiega circa 4 minuti per fare un giro completo.

- ▶ Posiziona il sistema di riferimento cartesiano nel centro della ruota ed esprimi le funzioni che descrivono l'ascissa e l'ordinata della posizione di un passeggero in funzione dell'angolo α formato dal raggio della ruota e dalla verticale (in modo che alla partenza l'angolo sia nullo e supponendo che la ruota giri in senso antiorario).
- ▶ Posiziona ora il sistema di riferimento cartesiano in modo che l'asse x coincida con la linea del terreno e l'asse y passi per il centro della ruota. Esprimi la funzione che descrive l'altezza del passeggero rispetto al terreno, sempre in relazione all'angolo α, e rappresenta il grafico di tale funzione.
- ▶ Esprimi l'altezza del passeggero trovata al punto precedente in funzione del tempo, anziché dell'angolo.
- ▶ A che altezza dal suolo si trova il passeggero dopo 30 secondi dalla partenza?

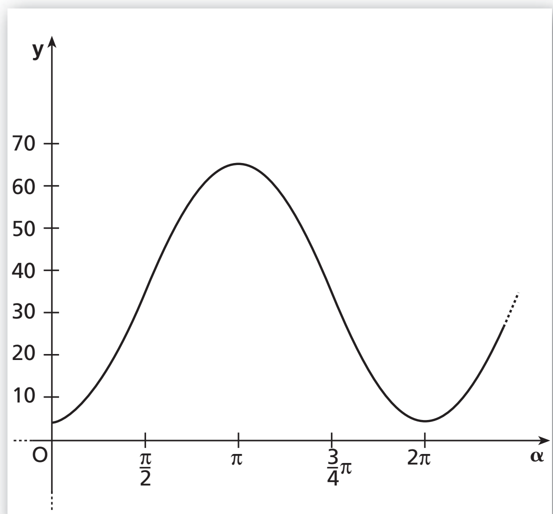
▶ Il raggio della ruota è $R = \dfrac{65-4}{2} = 30,5\ \text{m}$.

Il passeggero parte dalla posizione (0; ____). In base alla scelta dell'angolo si ottiene che l'ascissa del punto P è data da $x = 30{,}5 \cdot$ ____ e l'ordinata da $y = -30{,}5 \cdot$ ____.

▶ Con questo sistema di riferimento il passeggero parte dal punto (0; 4). La sua ____ rispetto al suolo è data da (vedi figura 1) $\overline{CH} + \overline{HO} - \overline{CK} = 30{,}5 + 4 - 30{,}5 \cdot$ ____ ovvero $y = 34{,}5 - 30{,}5 \cdot$ ____, il cui grafico è riportato nella figura 2.



▲ Figura 1



▶ Figura 2

▶ Dato che la ruota impiega circa 4 minuti = 240 secondi per compiere un giro completo, ovvero un angolo di 2π, si può impostare la seguente proporzione (supponendo che la velocità della ruota sia costante):

$$\alpha : \_\_\_\_ = t : 240$$

dove t indica il tempo impiegato a percorrere l'angolo α.
Perciò la funzione che fornisce l'altezza dal suolo del passeggero diventa:

$$y = 34{,}5 - 30{,}5 \cdot \cos \_\_\_\_ .$$

▶ 30 secondi corrispondono a un ottavo del periodo, perciò la ruota avrà effettuato un ottavo di giro. Quindi $\alpha =$ ____ e il passeggero si troverà a $34{,}5 - 30{,}5 \cdot \cos$ ____ $\simeq 12{,}93$ m di altezza.

2 La marea

La marea è un moto periodico di oceani e mari che si innalzano e abbassano anche di 10-15 metri, solitamente ogni circa sei ore. L'ampiezza (detta *altezza dell'onda di marea*, uguale al dislivello tra bassa e alta marea) dipende dalla conformazione della costa e del terreno.
Al molo di un villaggio in Bretagna una tabella riporta giorno per giorno gli orari della marea e precisa che l'altezza dell'acqua sul pilone del molo varia da 0,8 a 9,5 m. Per un certo giorno sono segnati i seguenti orari: alta marea ore 4:03; bassa marea ore 10:14; alta marea ore 16:25; bassa marea ore 22:36.

- ▶ Determina l'altezza media dell'acqua sul pilone, l'ampiezza della variazione e il periodo dell'onda di marea di quel giorno.
- ▶ La variazione dell'altezza del livello dell'acqua nel tempo può essere descritta da una funzione goniometrica; scrivi l'equazione di tale funzione fissando il tempo 0 in corrispondenza delle ore 4:03 e il livello 0 in corrispondenza dell'altezza media dell'acqua.
- ▶ Cambia il sistema di riferimento mettendo il livello 0 in corrispondenza del fondo del mare e il tempo 0 in corrispondenza dell'ora 0 della notte (esprimi il tempo in minuti) e rappresentane il grafico.

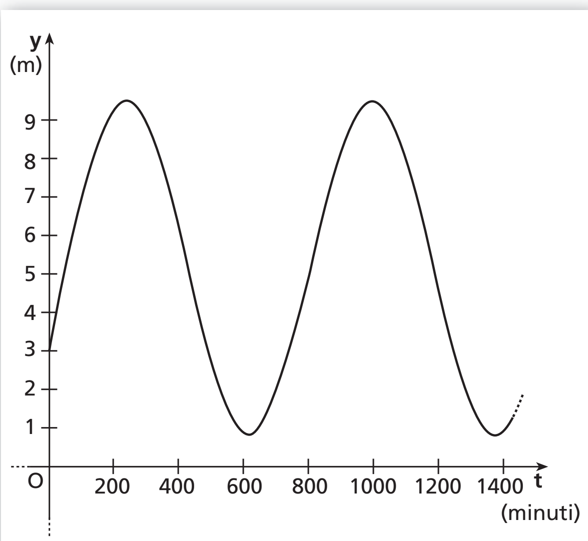
▶ L'altezza media dell'acqua è $\frac{9,05 + 0,8}{2} = 5,15$; l'ampiezza della variazione è 9,5 − 0,8 = 8,7 m e il periodo T dell'onda è ______ e 22 minuti, ovvero 742 minuti.

▶ Con il sistema di riferimento fissato, la funzione goniometrica deve passare dal punto (0; ______); si tratta perciò della funzione coseno:

$$y = 4,35 \cdot \underline{\qquad} \qquad \text{con } \omega = \frac{2\pi}{\underline{\quad}} = \frac{2\pi}{742} = \frac{\pi}{371}, \text{ quindi: } y = 4,35 \cdot \cos\left(\frac{\pi \underline{\quad}}{371}\right),$$

con il tempo misurato in minuti.

▶ Le ore 4:03 corrispondono a 243 minuti dopo mezzanotte, perciò nel nuovo sistema di riferimento la funzione deve passare per il punto (243; 9,5). In sostanza si deve ______ il grafico precedente verso ______ di 243 e verso ______ di 5,15. L'equazione diventa perciò $y = 5,15 + 4,35 \cdot \cos\left(\frac{\pi \underline{\qquad\qquad}}{371}\right)$.
Il grafico è il seguente.

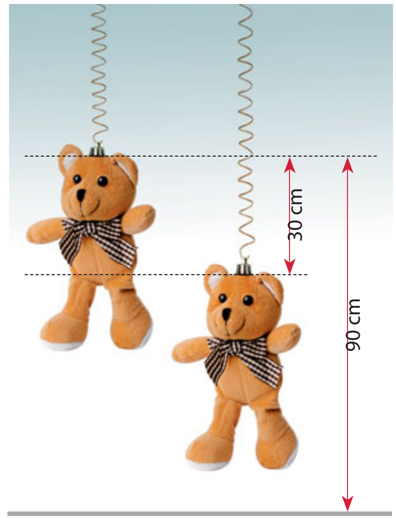


◀ Figura 3

3 Il pupazzetto a molla

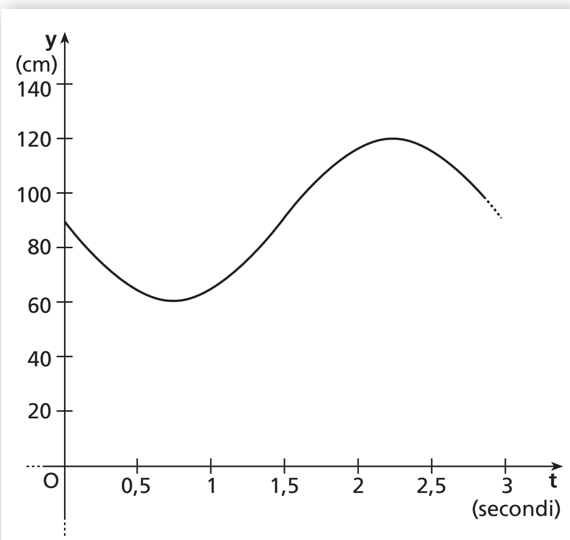
Roberto gioca con un pupazzetto a molla facendolo oscillare verticalmente, partendo da una posizione di equilibrio a un'altezza di 90 cm dal pavimento. Supponiamo che per effettuare un'oscillazione completa, di ampiezza 30 cm, e ritornare nella posizione iniziale impieghi 3 secondi.

- ▶ Esprimi mediante una funzione goniometrica la variazione dell'altezza dal suolo del pupazzetto in funzione del tempo e rappresenta il grafico della funzione.
- ▶ Quale posizione occupa il pupazzetto dopo 2 secondi?



▶ Al tempo $t = 0$ il pupazzetto si trova 90 cm da terra e per la stessa posizione passerà dopo 1,5 s (dato che per fare una oscillazione completa impiega 3 s). Nella posizione più bassa, a 60 cm dal pavimento, passerà dopo $\boxed{} = \boxed{}$ s e in quella più alta, a 120 cm, dopo $3 \cdot \boxed{} = \boxed{}$ s. Si tratta di una funzione sinusoidale del tipo $y = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$ con periodo $T = \frac{2\pi}{\omega} = \boxed{}$ s e ampiezza $A = 30$ cm, traslata verso l'alto di 90 cm. Quindi $h(t) = \boxed{} + \boxed{} \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi t}{3} + \varphi\right)$. Per determinare la fase φ bisogna considerare che il pupazzetto viene inizialmente tirato verso il basso, quindi $\varphi = \pi$ e $\mathrm{sen}\,\boxed{} = -\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi t}{3}\right)$. Perciò:

$$h(t) = 90 - 30 \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi t}{3}\right).$$



◀ **Figura 4**

▶ Dopo 2 secondi si ha:

$$h(2) = \boxed{} - \boxed{} \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi \cdot 2}{3}\right) \simeq 116\ \mathrm{cm},$$

perciò il pupazzetto si trova a circa 116 cm dal pavimento.