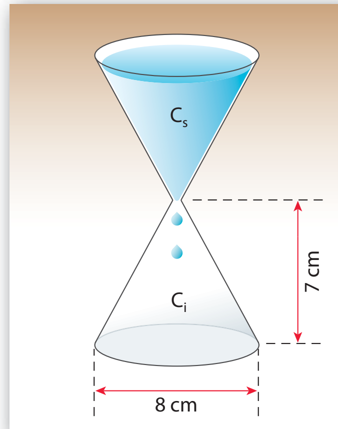
REALTÀ E MODELLI SCHEDA DI LAVORO

1 La clessidra ad acqua

Ipotizziamo che la clessidra ad acqua mostrata in figura sia formata da due coni perfetti sovrapposti. La clessidra impiega 1,5 minuti per svuotarsi e supponiamo che il volume di acqua che passa da C_s a C_i in un secondo sia costante.

- Determina quanta acqua scorre in un secondo.
- Esprimi il volume V e l'altezza h dell'acqua scesa in C_i in funzione del tempo t, considerando come istante iniziale quello in cui C_s è pieno.
- Considera la funzione $V(t)$ trovata al punto precedente non per un solo passaggio di acqua, ma tenendo conto del fatto che, appena il cono superiore si è svuotato, la clessidra viene girata; in un sistema di riferimento cartesiano rappresenta il grafico di tale funzione e descrivine le caratteristiche.



- Calcoliamo innanzitutto il volume del cono C_s, e quindi quello dell'acqua inizialmente contenuta; in cm^3 è:

$$\underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad} \simeq 117\ \text{cm}^3.$$

L'intero volume d'acqua contenuto inizialmente in C_s scorre in 1,5 minuti = 90 secondi, perciò il volume d'acqua che scorre in un secondo è:

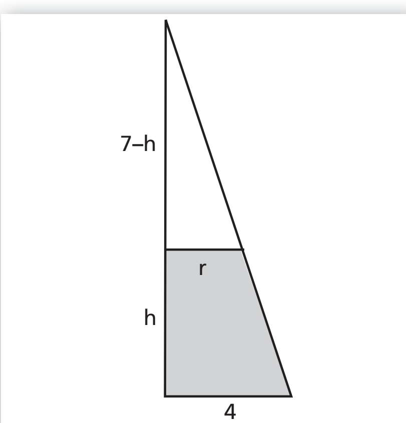
$$\underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad} \simeq 1{,}3\ \text{cm}^3/\text{s}.$$

- Il volume dell'acqua che si trova nel cono inferiore è dato dal volume che scorre in un secondo per il tempo trascorso:

$$V(t) = \underline{\qquad} \simeq 1{,}3 \cdot t, \text{ con } 0 \le t \le 90.$$

Man mano che l'acqua scende, determina un ____ in cui il raggio della base maggiore è 4 cm e l'altezza è h; il raggio della base minore r si ottiene dalla ____ dei triangoli, ovvero dalla proporzione $r : \underline{\quad} = \underline{\qquad} : 7$, perciò:

$$r = \frac{\underline{\qquad}}{7}.$$



◀ **Figura 1**

Il volume del tronco di cono $V(t) = 1{,}3 \cdot t$ è dato dalla ______ tra il volume totale del cono C_i e il volume del cono che rimane senza acqua; si ottiene così la seguente equazione:

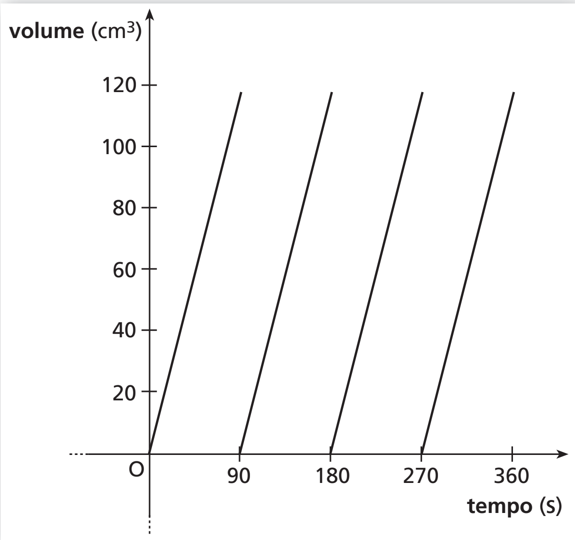
$$\_\_\_\_ = \_\_\_\_ = \_\_\_\_ = \frac{16\pi\,[343 - (7-h)^3]}{147},$$

da cui si può ricavare h in funzione di t:

$$(7-h)^3 = \_\_\_\_ \;\rightarrow\; 7 - h = \_\_\_\_ \;\rightarrow\; h(t) = \_\_\_\_$$

con $0 \leq t \leq 90$.

▶ Si tratta di una funzione periodica di periodo 90; al termine di ogni periodo ($t = 90k$, $k \in \mathbb{N} - \{0\}$) c'è un punto di discontinuità; all'interno di ogni periodo il grafico è un tratto di retta con coefficiente angolare 1,3.



◀ **Figura 2**

2 L'orologio

Considera un orologio analogico (a lancette) e costruisci la seguente funzione: la variabile indipendente corrisponde all'ora (dall'ora 1 all'ora 24), la variabile dipendente è l'angolo (in gradi) che la lancetta delle ore forma con la posizione verticale delle 12.

▶ Rappresenta tale funzione in forma tabulare, in forma analitica e nel piano cartesiano, quindi analizza le sue caratteristiche.

▶ Se si collegano i punti del grafico con tratti lineari, che cosa cambia nelle caratteristiche della funzione?

▶ Costruisci una funzione analoga considerando la lancetta dei minuti nell'arco di un'ora; rappresentala analiticamente e nel piano cartesiano e analizza le sue caratteristiche.

▶ L'angolo che la lancetta delle ore descrive spostandosi da un'ora alla successiva corrisponde alla dodicesima parte dell'angolo giro, cioè 30°.

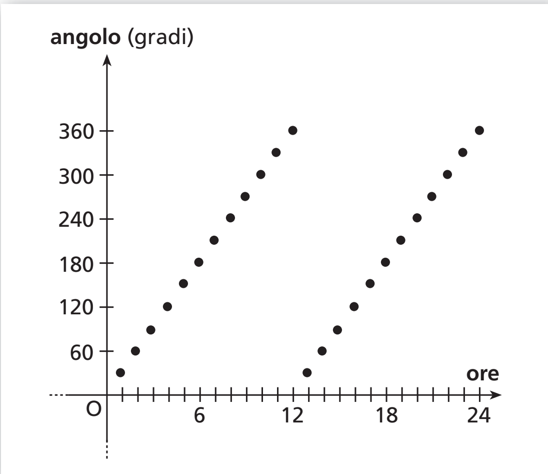
Ora	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Angolo (gradi)							210					360

Ora	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Angolo (gradi)	30							240				

La forma analitica della funzione è:

$$\alpha(h) = \begin{cases} \_\_\_\_ & \text{se } 1 \leq h \leq 12 \\ 30\ \_\_\_\_\_\_ & \text{se } 13 \leq h \leq 24 \end{cases}, \text{ con } h \in \mathbb{N}.$$

Il suo grafico è il seguente.



◀ Figura 3

▶ Si tratta di una funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ con:

$\_\_\_\_\_\_ = \{h \in \mathbb{N} | 1 \leq h \leq 24\}$ e $\_\_\_\_\_\_ = \{y \in \mathbb{N} |\ y = 30h, \text{ con } 1 \leq h \leq 12\}$.

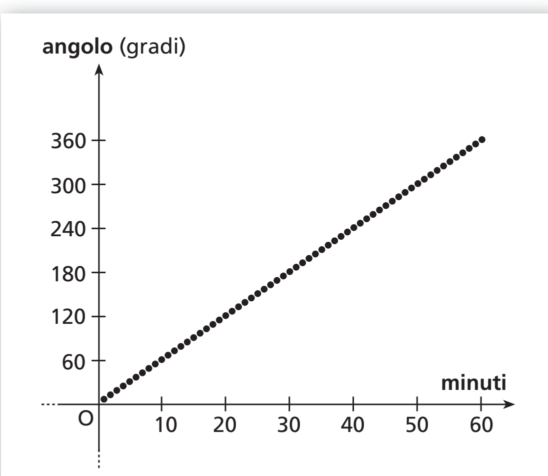
La funzione è ______ se la si considera ristretta al codominio, ma non è ______ (infatti ad ogni angolo corrispondono due ore della giornata), perciò non è ______.

▶ Diventa una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ con Dominio $= \{x \in \mathbb{R} |\ \_\_ \leq x \leq \_\_\}$ e Codominio $= \{y \in \mathbb{R} |\ \_\_ \leq y \leq \_\_\}$; la funzione rimane non ______ e quindi non ______.

▶ L'angolo tra un minuto e l'altro corrisponde alla ______ parte dell'angolo giro, cioè 6°.
La forma analitica della funzione è:

$$\beta(m) = \_\_\_, \text{ con } m \in \mathbb{N}, 1 \leq m \leq 60.$$

Dominio $= \{m \in \mathbb{N} | 1 \leq m \leq 60\}$, Codominio $= \{y \in \mathbb{N} |\ y = 6m, \text{ con } 1 \leq m \leq 60\}$; la funzione è ______ (infatti ad ogni angolo corrisponde un solo minuto all'interno della stessa ora) e ______ se la si considera ristretta al codominio, perciò è ______.
Il suo grafico è il seguente.



◀ Figura 4

3 **La diffusione dell’influenza**

Un modello matematico prevede che il virus dell’influenza si diffonda all’interno di una popolazione di P persone con una velocità (numero di nuovi casi giorno per giorno) che dipende in modo proporzionale sia dal numero di persone che già hanno contratto la malattia, sia da quelle che non sono state infettate.

- ▶ Mostra che (nell’ipotesi che la popolazione resti costante nel tempo) la velocità massima di diffusione si ha quando il numero di persone potenzialmente infette corrisponde alla metà della popolazione stessa.
- ▶ Calcola il valore della costante di proporzionalità nell’ipotesi che, su un campione di 100 000 persone, 1750 siano ammalate il giovedì e, il venerdì, ci siano 370 nuovi casi.
- ▶ Stima il numero di nuovi casi infetti il sabato.

▶ Se P indica il numero delle persone della popolazione e x il numero di quelle già infette, allora   è il numero di persone non infette. Il modello che esprime la velocità di diffusione della malattia giorno per giorno è esprimibile attraverso la seguente funzione quadratica:

$$f(x) = \qquad .$$

In questo modello k è la costante di proporzionalità ed è   .

La funzione $f(x) =$, nell’ipotesi P costante, rappresenta una   con concavità rivolta verso il   (poiché $k > 0$) e asse di simmetria $x = \frac{P}{2}$. Il valore massimo raggiunto dalla funzione si ha proprio per $x = \frac{P}{2}$ (ascissa del vertice) ed è:

$$f_{\max} = \qquad .$$

Poiché $f(x)$ rappresenta la rapidità di diffusione della malattia, si può concludere che la diffusione è molto rapida nella fase iniziale, e raggiunge il suo massimo quando   della popolazione è infetta.

▶ Con i dati del problema si ha:

$$f(1750) = k \cdot \qquad \cdot (\qquad) = 171\,937\,500 \cdot k.$$

Sapendo che l’incremento relativo al numero di ammalati è di 370, l’equazione da impostare è la seguente:

$$\qquad \rightarrow \quad k = \qquad .$$

▶ Il giovedì i malati sono 1750 e il venerdì ci sono 370 nuovi casi, quindi il venerdì ci sono in totale   malati. I nuovi casi di malattia del sabato sono perciò dati da:

$$f(2120) = \qquad \simeq 457.$$