REALTÀ E MODELLI SCHEDA DI LAVORO

1 Bagaglio a mano

Le regole per il bagaglio a mano di diverse compagnie aeree stabiliscono che la valigia (o borsa) deve avere un peso massimo di 5 kg e che la somma dei lati non deve superare i 115 cm. In molti modelli le borse per bagaglio a mano hanno una larghezza che supera di 15 cm la profondità.

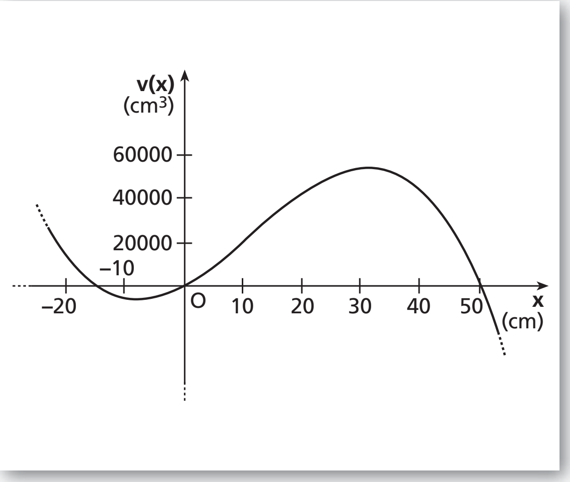
- Approssimando la forma della valigia a un parallelepipedo, esprimi il volume in funzione della profondità e studia il segno della funzione volume.
- Costruisci per punti una rappresentazione grafica approssimata della funzione volume e stabilisci con quali dimensioni (all'incirca) si ottiene la capienza massima della borsa.

- Indicata con x la profondità della borsa, la sua ______ è $x + 15$ e la sua ______ massima deve essere $115 -$ ___ $-$ ______ $=$ ______.
  Il volume è dato da $v(x) =$ ______________.
  La funzione è una cubica passante per l'origine (0; 0) e per i punti $(-15; 0)$, ______.
  Il ______ della funzione si ottiene studiando il segno di ogni ______ e applicando la regola dei segni.

		−15		0		50	
x	−		−		+		+
x + 15	−		+		+		+
100 − 2x	+		+		+		−
v(x)	+		−		+		−

◀ **Figura 1**

- Dallo studio del segno e dal calcolo del valore della funzione in alcuni punti, si deduce che la funzione deve avere un andamento di questo genere:



◀ **Figura 2**

Dal grafico si nota che il valore massimo per il volume si ottiene per $x \simeq 30$ cm; infatti in un suo intorno si ha:

$$v(25) = \qquad\quad = 50\ \text{dm}^3,$$
$$v(30) = 54\,000\ \text{cm}^3 = \qquad\quad,$$
$$v(35) = \qquad\quad = \qquad\quad.$$

In tal caso la borsa ha le seguenti dimensioni: 30 cm, 45 cm, 40 cm.

2 Stivali di qualità

Un calzaturificio produce un modello di stivali con una spesa fissa mensile di 4500 € e un costo unitario di 85 € al paio, che aumenta a 98 € per ciascun paio prodotto dopo i primi 500 nel mese. Il prezzo di vendita è fissato in 220 €, ma la vendita comporta un ulteriore costo complessivo pari a 20 volte il quantitativo mensile di produzione. La capacità produttiva mensile dell'azienda è di 1000 paia di stivali.

- ▶ Esprimi le funzioni costo, ricavo e guadagno in funzione del numero di stivali prodotti e rappresentale sul piano cartesiano.
- ▶ Individua il dominio di tali funzioni e stabilisci in quali intervalli sono crescenti e decrescenti.
- ▶ Calcola il numero di paia di stivali che l'azienda deve produrre (e vendere) per non essere in perdita e il massimo guadagno.

▶ Indichiamo con x il numero di paia di stivali prodotto . Le funzioni richieste sono perciò:

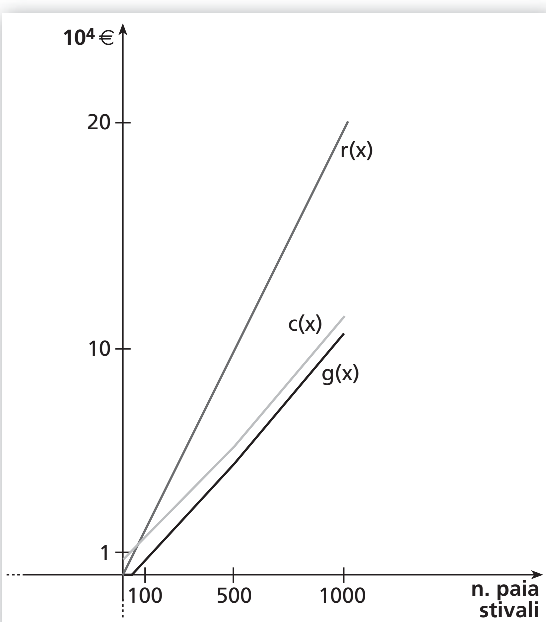
Costo: $$c(x) = \begin{cases} 4500 + 85x + 20x & \text{se } \quad \le x \le \quad \\ \qquad\qquad & \text{se } 501 \le x \le 1000 \end{cases}$$

ovvero: $$c(x) = \begin{cases} \qquad\qquad & \text{se } 0 \le x \le 500 \\ 118x - 2000 & \text{se } \quad \le x \le \quad \end{cases}$$

Ricavo: $$r(x) = \qquad$$

: $$g(x) = \qquad\quad = \begin{cases} \qquad\qquad & \text{se } 0 \le x \le 500 \\ \qquad\qquad & \text{se } 501 \le x \le 1000 \end{cases}$$

Rappresentiamo le tre funzioni in un grafico.



◀ Figura 3

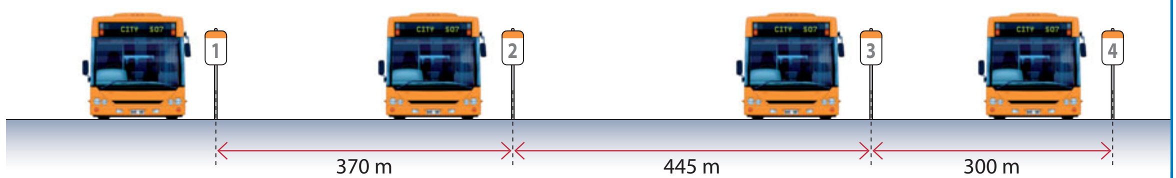
- Il ____ delle funzioni è $0 \le x \le 1000$; le tre funzioni sono sempre ____.
- Per non essere in perdita deve essere:

$$g(x) > 0 \quad \rightarrow \quad \_\_\_\_ > 0 \quad \rightarrow \quad x > \_\_\_\_,$$

perciò l'azienda deve produrre (e vendere) almeno ____ paia di stivali al ____.
Poiché la funzione guadagno è crescente, il guadagno massimo si ha con la ____ produzione, cioè per $x =$ ____, e in tal caso il guadagno è di 104 000 €.

3 Rivendita dei biglietti

Supponi che in una via periferica di Milano vengano predisposte quattro fermate di autobus che distano l'una dall'altra 370 m, 445 m, 300 m. Nella zona manca una rivendita di biglietti che possa essere raggiunta abbastanza comodamente a piedi da chi si trova a una delle fermate.



- Dov'è più opportuno posizionare la rivendita, sulla stessa via, in modo che la distanza complessiva dalle quattro fermate alla rivendita sia la minima possibile?

- Posizioniamo le quattro fermate su una retta orientata; mettiamo:
  - la fermata F_1 nell'origine;
  - la fermata F_2 nella posizione di ascissa 370;
  - la fermata F_3 nella posizione di ascissa $370 +$ ____ $=$ ____;
  - la fermata F_4 nella posizione di ascissa $370 +$ ____ $+$ ____ $= 1115$.

  Indichiamo con x l'ascissa della ____ in cui si metterà la rivendita R; sarà ovviamente $0 < x <$ ____.
  Bisogna trovare x in modo che sia minima la ____ delle distanze dalle quattro fermate alla rivendita, perciò bisogna trovare il ____ della funzione:

$$f(x) = \text{dist}(F_1, R) + \text{dist}(F_2, R) + \text{dist}(F_3, R) + \text{dist}(F_4, R).$$

  Con le limitazioni poste su x sarà:

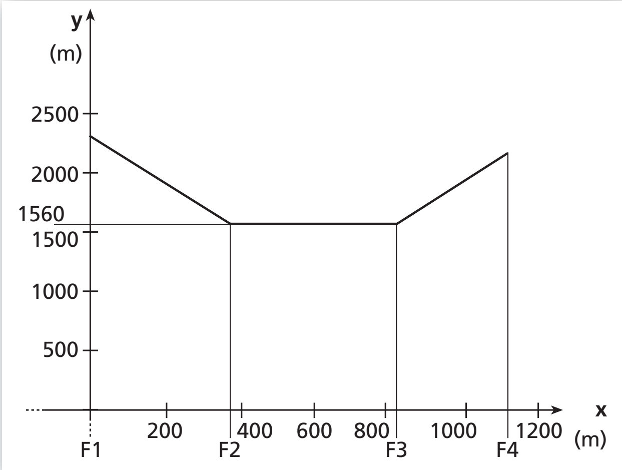
$$\text{dist}(F_1, R) = x; \quad \text{dist}(F_2, R) = |x - 370|; \quad \text{dist}(F_3, R) = \_\_\_\_; \quad \text{dist}(F_4, R) = \_\_\_\_.$$

  Perciò:

$$f(x) = \_\_\_\_ = 1115 + |x - 370| + |x - 815|.$$

Per rappresentare il grafico della funzione conviene esplicitare i valori ____:

$$f(x) = \begin{cases} 1115 - x + 370 - x + 815 = -2x + 2300 & \text{se } 0 < x \le \_\_\_\_ \\ 1115 + x - 370 - x + 815 = 1560 & \text{se } \_\_\_\_ < x \_\_\_\_ \\ 1115 + x - 370 + x - 815 = 2x - 70 & \text{se } \_\_\_\_ \end{cases}$$



◄ Figura 4

Rappresentando la funzione nel piano cartesiano notiamo che il valore ______ di $f(x)$ si ottiene con tutti i valori di x compresi tra ___ e 815, perciò bisogna posizionare la rivendita in un punto qualunque compreso tra la ______ e la terza fermata.

4 La roulette

Nel gioco della roulette, la giocata sul singolo numero prevede, se vincente, un compenso di 35 : 1 (per ogni euro puntato, si incassa l'euro giocato più altri 35); la giocata sul rosso o sul nero, invece, viene pagata 1 : 1.
Alan ha deciso di tentare la fortuna giocando sempre sul rosso. Punta inizialmente 10 € e raddoppia la giocata in caso di perdita, altrimenti incassa la vincita e si ritira dal tavolo.
Barney, invece, gioca sul singolo numero: punta inizialmente 50 € e aumenta di una certa quota fissa a ogni giocata successiva in caso di perdita, altrimenti anche lui incassa la vincita e si ritira.

▶ Sapendo che il rosso esce alla quarta giocata, quanto avrà guadagnato o perso Alan? E se il rosso fosse uscito alla dodicesima tornata?

▶ Di quanto deve essere la quota fissa massima che rilancia a ogni puntata Barney, se vuole garantirsi almeno 30 giocate e il suo budget per la serata è di 20 000 €?

▶ Indichiamo con a_n le giocate di Alan. Sarà allora (i valori si riferiscono agli euro):

$$a_1 = 10; \quad a_2 = 2 \cdot \_\_ = 20; \quad a_3 = \_\_\_ = 40; \quad a_4 = \_\_\_ = 80.$$

Alla quarta giocata, Alan avrà complessivamente puntato:

$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 10 + 20 + 40 + 80 = 150$$

e poiché la giocata è vincente, incassa $v_4 = \_\_\_ = \_\_\_ = 160$.
Il guadagno è quindi pari a ____ = ______ = 10 €.
Le giocate di Alan sono in progressione ______ di primo termine $a_1 = 10$ e ragione $q = 2$. Se la giocata vincente fosse la dodicesima, allora si avrebbe:

$$a_{12} = \_\_\_\_ = \_\_\_ = 20\,480, \quad s_{12} = a_1 \cdot \frac{q^{12} - 1}{q - 1} = \_\_\_\_ = \_\_\_\_ = 40\,950.$$

In questo caso la vincita è $v_{12} = 2 \cdot a_{12} = \_\_\_\_ = \_\_\_$ e il guadagno è ancora pari a:

$$v_{12} - s_{12} = \_\_\_ - \_\_\_ = 10 \text{ €}.$$

▶ Le giocate di Barney seguono l'andamento di una progressione ______ di primo termine $b_1 = 50$ e ragione d (da determinare). Nella trentesima giocata punta quindi:

$$b_n = b_1 + (n - 1) \cdot d \quad \rightarrow \quad b_{30} = \_\_\_\_\_\_ = 50 + \_\_\_$$

e in totale ha giocato:

$$s_n = n \cdot \frac{b_1 + b_n}{2} \quad \rightarrow \quad s_{30} = \qquad\qquad\qquad = 15 \cdot (100 + 29 \cdot d).$$

Il totale giocato s_{30} deve essere inferiore o uguale al budget a disposizione, quindi:

$$15 \cdot (100 + 29 \cdot d) \quad 20\,000 \quad \rightarrow \quad d \qquad\quad \simeq 42\ €.$$

Barney, quindi, deve rilanciare al più   € (circa) ad ogni puntata per assicurarsi almeno 30 giocate al tavolo.