REALTÀ E MODELLI SCHEDA DI LAVORO

1 La lattina in alluminio

Una comune lattina in alluminio ha il diametro di base di 7,5 cm e l'altezza di 10,5 cm.

▶ Scrivi l'equazione delle tre superfici che la delimitano rispetto a un opportuno sistema di riferimento cartesiano.

▶ Un sistema di riferimento opportuno ha il piano *Oxy* che contiene la base della lattina e l'origine che coincide con il centro del cerchio di base.
Il raggio di base della lattina è 3,75 cm, quindi le equazioni delle due superfici di base sono:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq \underline{\qquad\qquad} \\ z = \underline{\quad} \end{cases},$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq \underline{\qquad\qquad} \\ z = \underline{\qquad} \end{cases}$$

mentre l'equazione della superficie laterale del cilindro è:

$$\begin{cases} \underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad} \\ \underline{\quad} \leq z \leq \underline{\qquad} \end{cases}.$$

2 Il vasetto di cristallo

Anna, per il corso di design che sta frequentando, progetta un piccolo vaso di cristallo. Il vaso è alto 25 cm e ha la forma di una superficie cilindrica con la base formata da un arco di parabola delimitato da un segmento; tale segmento interseca l'asse della parabola formando un angolo di 45° e il punto di intersezione ha una distanza di 6 cm dal vertice della parabola.

▶ Fissato un opportuno sistema di riferimento, scrivi le equazioni delle superfici che delimitano il vaso (poni uguale a 1 il coefficiente del termine di secondo grado dell'equazione della parabola e il suo vertice nell'origine degli assi).

▶ Nel piano Oxy la parabola ha equazione $y = x^2$. Il segmento che delimita l'arco di parabola appartiene a una delle due rette di equazione $y = \pm x + 6$, scegliamo la retta $y = x + 6$.
Le coordinate dei punti di intersezione tra la retta e la parabola si ottengono risolvendo il sistema:

$$\boxed{} \rightarrow \boxed{} \rightarrow \boxed{} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = 9 \end{cases}$$

I punti di intersezione sono dunque $\boxed{}$ e (3; 9). Nel sistema di riferimento $Oxy z$ la porzione di superficie cilindrica parabolica ha equazione:

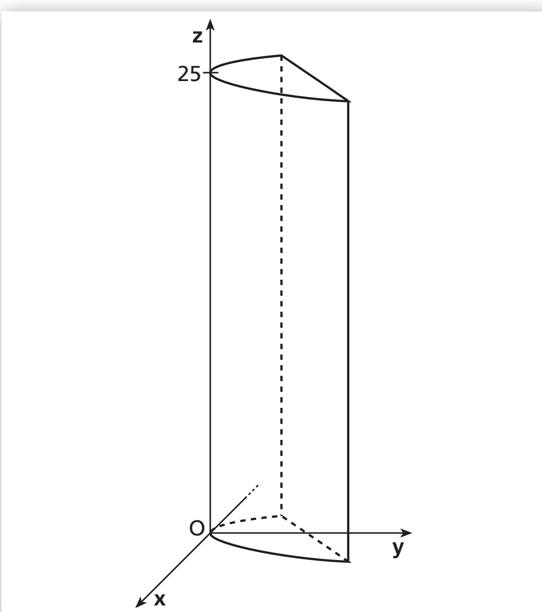
$$\begin{cases} y = x^2 \\ \boxed{} \le x \le \boxed{} \\ \boxed{} \le z \le \boxed{} \end{cases}$$

La parte di piano che rappresenta la parete verticale piana del vaso ha equazione:

$$\begin{cases} y = x + 6 \\ \boxed{} \le x \le \boxed{} \\ \boxed{} \le z \le \boxed{} \end{cases}$$

La parte di piano che rappresenta la base del vaso ha equazione:

$$\begin{cases} y \boxed{} x + 6 \\ y \boxed{} x^2 \\ z = 0 \end{cases}$$



◄ Figura 1

3 Il pozzo di San Patrizio

Il pozzo di San Patrizio, a Orvieto, è profondo quasi 62 m e ha una forma cilindrica con base circolare di diametro 13,40 m. La parete del pozzo è percorsa, fino in fondo, da due rampe elicoidali (a cui si accede da due porte diametralmente opposte), lungo le quali i muli un tempo potevano salire e scendere, senza ostacolarsi, per andare ad attingere l'acqua. L'altezza interna di ogni rampa è di circa 2 m.

- Rappresenta graficamente la posizione delle due rampe nella parte terminale (sottoterra) del pozzo.
- Scrivi l'equazione delle due rampe elicoidali rispetto a un sistema di riferimento con assi x e y sulla base del pozzo e l'origine nel centro della base.

(**SUGGERIMENTO** Le equazioni parametriche dell'elica con le caratteristiche descritte sono

$x = r\cos\alpha,\ y = r\,\mathrm{sen}\,\alpha,\ z = c\dfrac{\alpha}{2\pi}$,

con r = raggio di base, c = passo dell'elica, cioè la distanza tra due punti della stessa elica sulla stessa verticale, $\alpha \geq 0$.)

- Disegniamo come le rampe elicoidali si avvolgono intorno al pozzo.

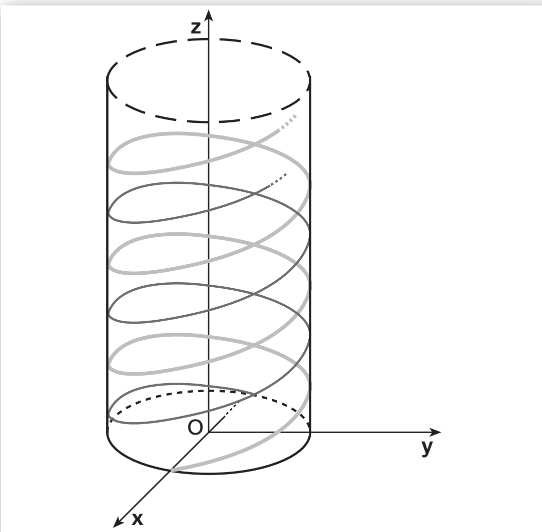


Figura 2

- Come detto nel problema, l'altezza interna di ogni rampa è 2 m. Dal disegno qui sopra, dato che le rampe sono due, si capisce che la distanza tra due punti sulla stessa verticale nella medesima rampa è il ______ di questa misura, ovvero il passo è $c =$ ______.

Il raggio è ovviamente $r =$ ______ $=$ ______ m, quindi l'equazione delle due rampe è:

$$\begin{cases} x = \underline{\qquad} \\ y = \underline{\qquad}, \\ z = \underline{\qquad} \end{cases} \quad \text{con } \alpha \geq 0 \text{, per la prima rampa;}$$

$$\begin{cases} x = 6{,}7 \cdot \underline{\qquad} \\ y = 6{,}7 \cdot \underline{\qquad}, \\ z = \underline{\qquad} \end{cases} \quad \text{con } \alpha \geq 0 \text{, per la seconda rampa.}$$

Per delimitare dall'alto il valore di α bisogna considerare che l'altezza del pozzo cilindrico è circa 62 m e il passo è 4 m:

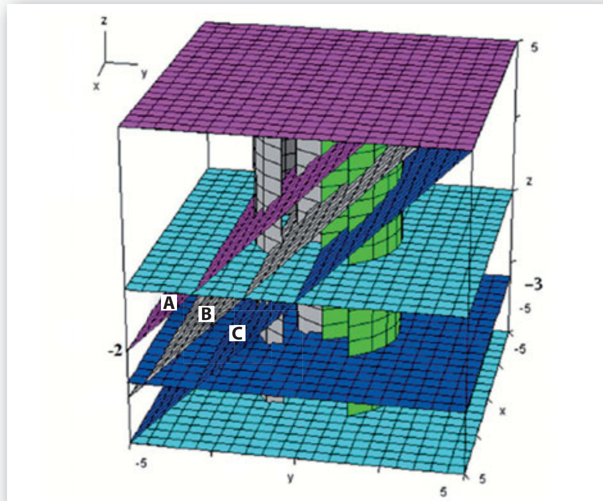
______ $= 15{,}5$, quindi ogni rampa si avvolge circa 15,5 volte intorno al pozzo.

Ogni giro completo della rampa corrisponde a un angolo 2π descritto dal parametro α, che pertanto deve essere minore o uguale (all'incirca) di ______ $=$ ______.
In conclusione, deve essere $0 \leq \alpha \leq$ ______.

4 **Progettiamo uno spazio espositivo?**

Un progettista elabora mentalmente l'idea di uno spazio espositivo e inizia a disegnare, con software dedicati, un primo modello grafico. In figura riportiamo uno schizzo con le superfici che individuano gli spazi principali. Utilizzando le informazioni riportate in figura, determina:

- le equazioni dei piani orizzontali paralleli;
- le equazioni del piano obliquo B, parallelo all'asse x e passante per il punto $\left(0; 0; \frac{3}{2}\right)$, e dei piani A e C a esso paralleli;
- le equazioni dei due cilindri (considerati chiusi) rispettivamente di raggi 1 e $\sqrt{5}$.



- Nel sistema di riferimento fissato in figura, i piani orizzontali paralleli al piano $z = 0$ si ottengono applicando al piano Oxy (corrispondente a $z = 0$) le opportune traslazioni:

  $(x; y; 0) \mapsto (x; y; \;\_\_\_\;)$ da cui $z = \_\_\_$;
  $(x; y; 0) \mapsto (x; y; \;\_\_\_\;)$ da cui $z = \_\_\_$;
  $(x; y; 0) \mapsto (x; y; \;\_\_\_\;)$ da cui $z = \_\_\_$.

- I piani obliqui sono paralleli all'asse x, quindi le loro equazioni sono nella forma ___ $= 0$.

  Il piano A, parallelo all'asse x, interseca il piano Oyz nei punti $(0; -5; -5)$ e $(0; 5; 5)$, quindi individua la retta di equazione:

  $\{$ ___

  L'equazione $z = y$ è l'equazione del piano A.

  Il piano B è ___ ad A e passa per il punto $(0; 0; \_\_\_)$, quindi la sua equazione è del tipo $z = \_\_\_ + q$ con q tale che $\left(0; 0; \frac{3}{2}\right)$ sia soluzione dell'equazione. Risulta $q = \_\_\_$.

  L'equazione $z = y + \frac{3}{2}$, ovvero $2y - 2z + 3 = 0$, è l'equazione del piano ___.

  Il piano C è ___ ad A e a ___ ed è passante per $(0; \_\_\_; \_\_\_)$, da cui $z = \_\_\_$.

- I cilindri sono retti con asse parallelo all'asse z, quindi le loro equazioni sono individuate dall'equazione della circonferenza direttrice sul piano Oxy.
  Il cilindro interno ha perciò equazione $x^2 + y^2 = 1$, quello esterno ___ perché il raggio è ___.