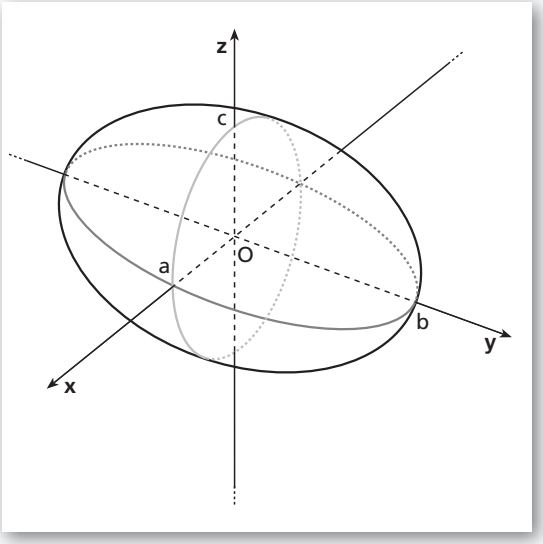
REALTÀ E MODELLI SCHEDA DI LAVORO

1 Il pallone da rugby

Il regolamento del rugby prevede che il pallone sia un ovale di determinate misure. Noi lo possiamo approssimare con una superficie quadrica di misure esterne $30 \times 20 \times 18$ cm. Considerato un opportuno sistema di riferimento con origine nel centro del pallone, determina:

- il tipo di superficie e la sua equazione;
- quale delle tre sezioni con i piani coordinati ha superficie maggiore.

- La figura individuata dal pallone (secondo la nostra approssimazione) è un _____, che disegniamo.



◀ Figura 1

Dimezzando le misure date nel problema otteniamo i valori dei semiassi:

$$a = 10 \text{ cm}, \quad b = 15 \text{ cm}, \quad c = 9 \text{ cm}.$$

L'equazione dell'ellissoide è quindi:

$$_____ = 1 \rightarrow _____ = 1.$$

- La sezione con il piano Oxy ($z = 0$) è l'ellisse di equazione _____ $= 1$ con semiassi $a = 10$, $b = 15$.

La sua superficie ha area:

$$S_{xy} = \pi ab = \pi \cdot 10 \cdot 15 \simeq 471{,}24 \text{ cm}^2.$$

La sezione con il piano Oxz ($y = 0$) è l'ellisse di equazione _____ $= 1$ con semiassi $a = 10$, $c = 9$.

La sua superficie ha area:

$$S_{xz} = \pi ac = \pi \cdot 10 \cdot 9 \simeq 282{,}74 \text{ cm}^2.$$

La sezione con il piano Oyz ($x = 0$) è l'ellisse di equazione _____ $= 1$ con semiassi $b = 15$, $c = 9$.

La sua superficie ha area:

$$S_{yz} = \pi bc = \pi \cdot 15 \cdot 9 \simeq 424{,}12 \text{ cm}^2.$$

L'area maggiore è quella dell'ellisse determinata dall'intersezione dell'ellissoide con il piano Oxy.

Copyright © 2012 Zanichelli editore S.p.A., Bologna
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

2 **Il vasetto di cristallo**

Anna, per il corso di design che sta frequentando, progetta un piccolo vaso di cristallo. Il vaso è alto 25 cm e ha la forma di una superficie cilindrica con la base formata da un arco di parabola delimitato da un segmento; tale segmento interseca l'asse della parabola formando un angolo di 45° e il punto di intersezione ha una distanza di 6 cm dal vertice della parabola.

▶ Fissato un opportuno sistema di riferimento, scrivi le equazioni delle superfici che delimitano il vaso (poni uguale a 1 il coefficiente del termine di secondo grado dell'equazione della parabola e il suo vertice nell'origine degli assi).

▶ Nel piano Oxy la parabola ha equazione $y = x^2$. Il segmento che delimita l'arco di parabola appartiene a una delle due rette di equazione $y = \pm x + 6$, scegliamo la retta $y = x + 6$.
Le coordinate dei punti di intersezione tra la retta e la parabola si ottengono risolvendo il sistema:

$$\square \rightarrow \square \rightarrow \square \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = 9 \end{cases}$$

I punti di intersezione sono dunque $\square$ e (3; 9). Nel sistema di riferimento $Oxyz$ la porzione di superficie cilindrica parabolica ha equazione:

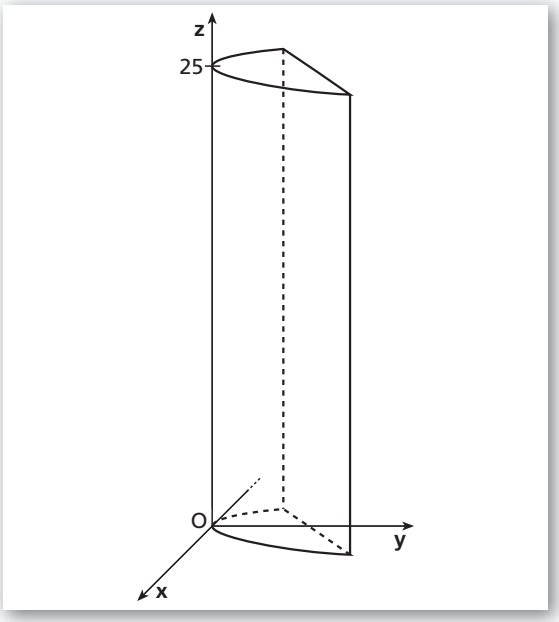
$$\begin{cases} y = x^2 \\ \square \leq x \leq \square \\ \square \leq z \leq \square \end{cases}$$

La parte di piano che rappresenta la parete verticale piana del vaso ha equazione:

$$\begin{cases} y = x + 6 \\ \square \leq x \leq \square \\ \square \leq z \leq \square \end{cases}$$

La parte di piano che rappresenta la base del vaso ha equazione:

$$\begin{cases} y \ \square \ x + 6 \\ y \ \square \ x^2 \\ z = 0 \end{cases}$$



◀ **Figura 2**

Copyright © 2012 Zanichelli editore S.p.A., Bologna
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

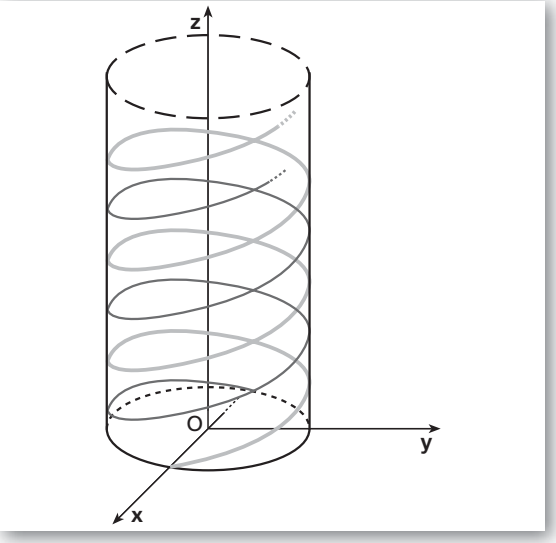
3 **Il pozzo di San Patrizio**

Il pozzo di San Patrizio, a Orvieto, è profondo quasi 62 m e ha una forma cilindrica con base circolare di diametro 13,40 m. La parete del pozzo è percorsa, fino in fondo, da due rampe elicoidali (a cui si accede da due porte diametralmente opposte), lungo le quali i muli un tempo potevano salire e scendere, senza ostacolarsi, per andare ad attingere l'acqua. L'altezza interna di ogni rampa è di circa 2 m.

- Rappresenta graficamente la posizione delle due rampe nella parte terminale (sottoterra) del pozzo.
- Scrivi l'equazione delle due rampe elicoidali rispetto a un sistema di riferimento con assi x e y sulla base del pozzo e l'origine nel centro della base.

(**SUGGERIMENTO** Le equazioni parametriche dell'elica con le caratteristiche descritte sono
$x = r\cos\alpha$, $y = r\,\text{sen}\,\alpha$, $z = c\dfrac{\alpha}{2\pi}$,
con r = raggio di base, c = passo dell'elica, cioè la distanza tra due punti della stessa elica sulla stessa verticale, $\alpha \geq 0$.)

- Disegniamo come le rampe elicoidali si avvolgono intorno al pozzo.



◀ **Figura 3**

- Come detto nel problema, l'altezza interna di ogni rampa è 2 m. Dal disegno qui sopra, dato che le rampe sono due, si capisce che la distanza tra due punti sulla stessa verticale nella medesima rampa è il _____ di questa misura, ovvero il passo è $c =$ ____.

Il raggio è ovviamente $r =$ _____ $=$ ____ m, quindi l'equazione delle due rampe è:

$$\begin{cases} x = ____ \\ y = ____, \\ z = ____ \end{cases} \quad \text{con } \alpha \geq 0, \text{ per la prima rampa;}$$

$$\begin{cases} x = 6{,}7 \cdot ____ \\ y = 6{,}7 \cdot ____, \\ z = ____ \end{cases} \quad \text{con } \alpha \geq 0, \text{ per la seconda rampa.}$$

Per delimitare dall'alto il valore di α bisogna considerare che l'altezza del pozzo cilindrico è circa 62 m e il passo è 4 m:

____ $= 15{,}5$, quindi ogni rampa si avvolge circa 15,5 volte intorno al pozzo.

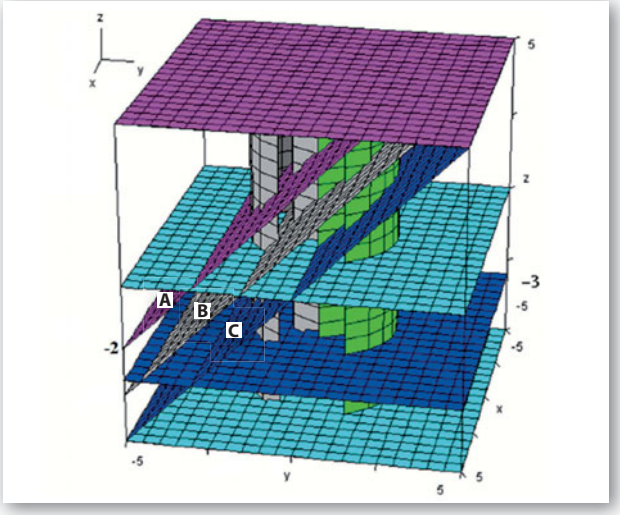
Ogni giro completo della rampa corrisponde a un angolo 2π descritto dal parametro α, che pertanto deve essere minore o uguale (all'incirca) di _____ $=$ ____.
In conclusione, deve essere $0 \leq \alpha \leq$ ____.

Copyright © 2012 Zanichelli editore S.p.A., Bologna
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

4 **Progettiamo uno spazio espositivo?**

Un progettista elabora mentalmente l'idea di uno spazio espositivo e inizia a disegnare, con software dedicati, un primo modello grafico. In figura riportiamo uno schizzo con le superfici che individuano gli spazi principali. Utilizzando le informazioni riportate in figura, determina:

- le equazioni dei piani orizzontali paralleli;
- le equazioni del piano obliquo B, parallelo all'asse x e passante per il punto $\left(0; 0; \frac{3}{2}\right)$, e dei piani A e C a esso paralleli;
- le equazioni dei due cilindri (considerati chiusi) rispettivamente di raggi 1 e $\sqrt{5}$.



- Nel sistema di riferimento fissato in figura, i piani orizzontali paralleli al piano $z = 0$ si ottengono applicando al piano Oxy (corrispondente a $z = 0$) le opportune traslazioni:

  $(x; y; 0) \mapsto (x; y; \quad)$ da cui $z = \quad$;
  $(x; y; 0) \mapsto (x; y; \quad)$ da cui $z = \quad$;
  $(x; y; 0) \mapsto (x; y; \quad)$ da cui $z = \quad$.

- I piani obliqui sono paralleli all'asse x, quindi le loro equazioni sono nella forma $\qquad = 0$.

  Il piano A, parallelo all'asse x, interseca il piano Oyz nei punti $(0; -5; -5)$ e $(0; 5; 5)$, quindi individua la retta di equazione:

  $\begin{cases} \qquad \\ \qquad \end{cases}$

  L'equazione $z = y$ è l'equazione del piano A.

  Il piano B è $\qquad$ ad A e passa per il punto $\left(0; 0; \quad\right)$, quindi la sua equazione è del tipo $z = \quad + q$ con q tale che $\left(0; 0; \frac{3}{2}\right)$ sia soluzione dell'equazione. Risulta $q = \quad$.

  L'equazione $z = y + \frac{3}{2}$, ovvero $2y - 2z + 3 = 0$, è l'equazione del piano $\quad$.

  Il piano C è $\qquad$ ad A e a $\quad$ ed è passante per $(0; \quad; \quad)$, da cui $z = \qquad$.

- I cilindri sono retti con asse parallelo all'asse z, quindi le loro equazioni sono individuate dall'equazione della circonferenza direttrice sul piano Oxy.
  Il cilindro interno ha perciò equazione $x^2 + y^2 = 1$, quello esterno $\qquad$ perché il raggio è $\quad$.

Copyright © 2012 Zanichelli editore S.p.A., Bologna
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi