REALTÀ E MODELLI SCHEDA DI LAVORO

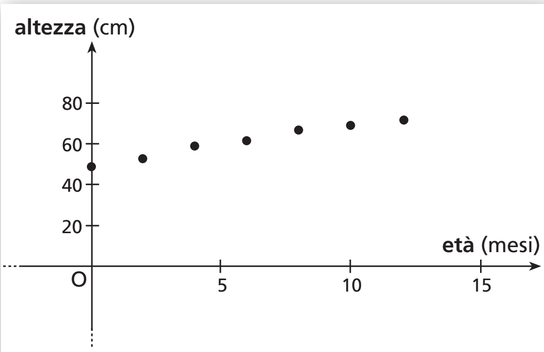
1 Le tabelle di crescita

Nella tabella sono riportati i dati relativi alle altezze medie delle bambine dalla nascita fino a un anno di età.

▶ Stabilisci se esiste una relazione lineare tra le due grandezze determinando l'equazione delle rette di regressione e calcolando l'indice di correlazione.

Età (mesi)	Altezza (cm)
0	49
2	53
4	59
6	62
8	66
10	68
12	71

▶ Rappresentiamo i dati in un diagramma a dispersione e applichiamo il metodo dei minimi quadrati.



◀ Figura 1

La retta interpolante ha equazione:

$$y - \overline{y} = a(x - \overline{x})$$

dove $(\overline{x}; \overline{y})$ rappresenta il baricentro della distribuzione:

$$\overline{x} = \frac{\quad}{7} = 6; \ \overline{y} = \frac{\quad}{\quad} \simeq 61,14.$$

Riportiamo nella seguente tabella i dati necessari al calcolo di a.

x_i	y_i	x_i'	y_i'	$x_i'y_i'$	$(x_i')^2$
0	49			72,84	
2	53			32,56	
4	59			4,28	
6	62			0	
8	66			9,72	
10	68			27,44	
12	71			59,16	

dove $x_i' = x_i - \overline{x}$ e $y_i' = y_i - \overline{y}$.

Calcoliamo:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{7} x'_i y'_i}{\sum_{i=1}^{7} (x'_i)^2} = \underline{\qquad} \simeq 1,84.$$

L'equazione della retta di regressione y su x è:

$$y - 61,14 = \underline{\qquad}(x - 6) \;\rightarrow\; y = \underline{\qquad}x + 50,1.$$

Analogamente si ottiene la retta di regressione x su y:

$$x - \underline{\quad} = \underline{\qquad}(y - \underline{\qquad}) \;\rightarrow\; x = 0,53y - \underline{\qquad}.$$

Ciò significa che dopo un mese l'altezza aumenta di circa 1,84 cm e che per osservare un aumento di altezza di un centimetro devono trascorrere 0,53 mesi.

I coefficienti di regressione sono:

$$m_1 = \underline{\qquad}, \quad m_2 = \underline{\qquad},$$

quindi l'indice di correlazione è:

$$r = \sqrt{m_1 \cdot m_2} = \underline{\qquad}.$$

Questo indica che c'è una correlazione molto alta tra età e statura.

2 **Il mercato immobiliare**

La tabella riporta i dati, relativi al primo semestre 2010, dei prezzi degli appartamenti di nuova costruzione in vendita nella periferia est di Roma, in base al numero dei locali.

- ▶ È possibile trovare una funzione che leghi il prezzo al numero dei locali?
- ▶ Trovata la retta interpolante, determina la bontà dell'accostamento con l'indice quadratico relativo I.
- ▶ Sulla base dei risultati precedenti stabilisci quanto potrebbe costare un appartamento di 6 locali.

Numero locali	Prezzo (in euro)
1	230 000
2	280 000
3	320 000
4	380 000
5	450 000

▶ Calcoliamo i valori che servono per determinare la retta interpolante.
I valori medi $\overline{x}$, $\overline{y}$ della distribuzione sono:

$$\overline{x} = \frac{\underline{\qquad\qquad}}{\underline{\quad}} = 3; \; \overline{y} = \frac{\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}}{\underline{\quad}} = 332\,000.$$

Posto $x'_i = x_i - \overline{x}$ e $y'_i = y_i - \overline{y}$, compiliamo la seguente tabella.

x_i	y_i	x'_i	y'_i	$x'_i y'_i$	$(x'_i)^2$
1	230 000				
2	280 000				
3	320 000				
4	380 000			48 000	
5	450 000			236 000	

La retta interpolante ha equazione:

$$y - \overline{y} = a(x - \overline{x}).$$

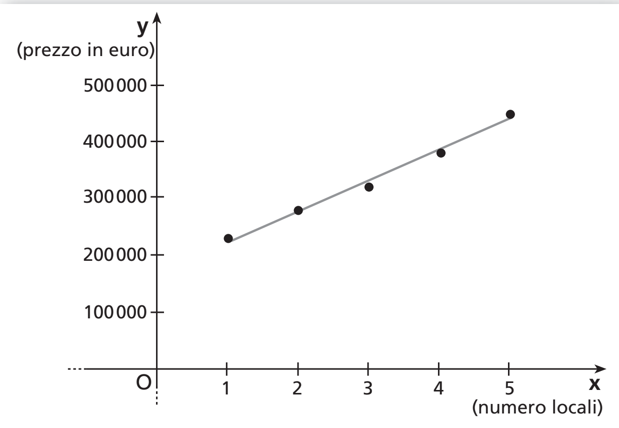
Calcoliamo a:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i' y_i'}{\sum_{i=1}^{5} (x_i')^2} = \frac{\quad}{\quad} = 54\,000.$$

L'equazione della retta di regressione y su x è:

$$\quad = \quad \rightarrow y = \quad,$$

il cui grafico è il seguente.



◄ **Figura 2**

► Riportiamo nella seguente tabella i valori per il calcolo dell'indice quadratico relativo I.

x_i	$f(x_i)$	$y_i - f(x_i)$	$[y_i - f(x_i)]^2$
1			36 000 000
2			4 000 000
3			144 000 000
4			36 000 000
5			100 000 000

$f(x_i)$ rappresenta il valore ottenuto dalla retta interpolante in corrispondenza di $x = \quad$.

L'indice quadratico relativo è:

$$I = \frac{\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{5} \quad}{5}}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{5} \quad}{5}} = \frac{\sqrt{\dfrac{320\,000\,000}{5}}}{\dfrac{1660\,000}{5}} \simeq 0{,}024.$$

Essendo I ____, possiamo affermare che la funzione trovata è adatta a rappresentare il fenomeno studiato.

► Basta sostituire all'interno dell'equazione ____ il valore ____ e determinare il relativo prezzo:

$$y = 54\,000 \cdot 6 + 170\,000 = 494\,000 \text{ €}.$$

3 **I voti**

Fai riferimento alla pagella che hai compilato per l'esercizio 3 (Quanto vale la condotta?) di Realtà e modelli del capitolo precedente, oppure compilane una sulla base delle indicazioni fornite in quel problema.

- ▶ Tradizionalmente si dice che gli studenti che vanno bene in matematica vanno bene anche in latino. Usando il coefficiente di correlazione lineare, stabilisci se questo è vero nel caso della pagella che hai preparato.
- ▶ Analizza la correlazione tra italiano e latino, tra matematica e fisica, tra storia e filosofia.

▶ Facciamo riferimento alla seguente pagella.

N. alunno	Italiano	Latino	Inglese	Storia	Filosofia	Matematica	Fisica	Scienze	Disegno e storia dell'arte	Ed. fisica	Condotta
1	6	6	7	7	8	6	7	8	7	7	8
2	6	6	8	6	6	7	6	7	7	8	8
3	7	7	9	8	7	8	9	8	7	8	9
4	6	6	7	6	6	6	6	7	7	9	8
5	6	7	8	7	6	7	6	7	8	8	9
6	6	8	8	8	7	7	6	6	7	7	9
7	7	6	6	6	6	6	6	6	7	7	8
8	8	7	7	6	6	6	7	6	8	7	9
9	6	6	8	7	7	8	8	7	6	7	9
10	8	6	7	6	6	6	7	9	7	7	9
11	7	6	7	6	6	7	6	7	8	6	9
12	6	6	6	8	7	7	6	6	9	8	9
13	7	8	8	6	6	7	7	7	8	7	7
14	6	6	6	6	6	6	6	9	7	7	8
15	8	7	8	8	7	6	6	7	8	8	9
16	6	6	6	7	6	6	6	6	7	7	9
17	7	6	7	8	8	7	6	6	8	7	9
18	6	6	7	6	7	6	7	6	7	8	9
19	6	6	7	7	6	6	6	6	7	7	7
20	7	7	8	9	8	9	9	9	8	8	7

Per calcolare il coefficiente di correlazione $\qquad$ (di Bravais-Pearson) si potrebbe ricorrere a un foglio elettronico, che fornisce immediatamente il risultato.
Qui riportiamo invece i vari passaggi. La formula per il calcolo del coefficiente di correlazione è:

$$r = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \overline{x}) \cdot \qquad}{\sqrt{\sum_{i=1}^{20} \qquad \cdot \sum_{i=1}^{20} (y_i - \overline{y})^2}}.$$

Per la correlazione matematica-latino compiliamo la seguente tabella.

N. alunno	Latino	Matematica	$x'_i = x_i - \overline{x}$	$y'_i = y_i - \overline{y}$	$x'_i \cdot y'_i$	$(x'_i)^2$	$(y'_i)^2$
1	6	6			0,315	0,2025	0,49
2	6	7			− 0,135	0,2025	0,09
3	7	8			0,715	0,3025	1,69
4	6	6			0,315	0,2025	0,49
5	7	7			0,165	0,3025	0,09
6	8	7			0,465	2,4025	0,09
7	6	6			0,315	0,2025	0,49
8	7	6			− 0,385	0,3025	0,49
9	6	8			− 0,585	0,2025	1,69
10	6	6			0,315	0,2025	0,49
11	6	7			− 0,135	0,2025	0,09
12	6	7			− 0,135	0,2025	0,09
13	8	7			0,465	2,4025	0,09
14	6	6			0,315	0,2025	0,49
15	7	6			− 0,385	0,3025	0,49
16	6	6			0,315	0,2025	0,49
17	6	7			− 0,135	0,2025	0,09
18	6	6			0,315	0,2025	0,49
19	6	6			0,315	0,2025	0,49
20	7	9			1,265	0,3025	5,29
Medie				SOMME	3,7	8,95	14,2

Otteniamo i seguenti valori:

$\sigma_{XY} =$ $\sigma_X =$, $\sigma_Y =$,

$r = \dfrac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \dfrac{\quad}{\quad} \simeq 0,33$ coefficiente di correlazione lineare matematica-latino.

In questo caso non si può dire che gli studenti che vanno bene in matematica vadano bene anche in latino.

Per la correlazione italiano-latino compiliamo la seguente tabella.

N. alunno	Italiano	Latino	$x_i' = x_i - \overline{x}$	$y_i' = y_i - \overline{y}$	$x_i' \cdot y_i'$	$(x_i')^2$	$(y_i')^2$
1	6	6			0,27		
2	6	6			0,27		
3	7	7			0,22		
4	6	6			0,27		
5	6	7			− 0,33		
6	6	8			− 0,93		
7	7	6			− 0,18		
8	8	7			0,77		
9	6	6			0,27		
10	8	6			− 0,63		
11	7	6			− 0,18		
12	6	6			0,27		
13	7	8			0,62		
14	6	6			0,27		
15	8	7			0,77		
16	6	6			0,27		
17	7	6			− 0,18		
18	6	6			0,27		
19	6	6			0,27		
20	7	7			0,22		
Medie				SOMME	2,6	10,8	8,95

Otteniamo i seguenti valori:

$\sigma_{XY} = \quad$, $\quad \sigma_X = \quad$, $\quad \sigma_Y = \quad$,

$$r = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{\quad}{\quad} \simeq 0,26$$ coefficiente di correlazione italiano-latino.

Per la correlazione matematica-fisica compiliamo la seguente tabella.

N. alunno	Matematica	Fisica			$x'_i \cdot y'_i$		
1	6	7			− 0,245		
2	7	6			− 0,195		
3	8	9			3,055		
4	6	6			0,455		
5	7	6			− 0,195		
6	7	6			− 0,195		
7	6	6			0,455		
8	6	7			− 0,245		
9	8	8			1,755		
10	6	7			− 0,245		
11	7	6			− 0,195		
12	7	6			− 0,195		
13	7	7			0,105		
14	6	6			0,455		
15	6	6			0,455		
16	6	6			0,455		
17	7	6			− 0,195		
18	6	7			− 0,245		
19	6	6			0,455		
20	9	9			5,405		
Medie				SOMME			

Otteniamo i seguenti valori:

$\sigma_{XY} =$ ____, $\sigma_X =$ ____, $\sigma_Y =$ ____,

$r = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{\quad}{\quad} \simeq 0,67$ coefficiente di correlazione matematica-fisica.

Per la correlazione storia-filosofia compiliamo la seguente tabella.

N. alunno	Storia	Filosofia					
1	7	8			0,14		
2	6	6			0,54		
3	8	7			0,44		
4	6	6			0,54		
5	7	6			− 0,06		
6	8	7			0,44		
7	6	6			0,54		
8	6	6			0,54		
9	7	7			0,04		
10	6	6			0,54		
11	6	6			0,54		
12	8	7			0,44		
13	6	6			0,54		
14	6	6			0,54		
15	8	7			0,44		
16	7	6			− 0,06		
17	8	8			1,54		
18	6	7			− 0,36		
19	7	6			− 0,06		
20	9	8			2,94		

Otteniamo i seguenti valori:

$\sigma_{XY} =$ ______, $\sigma_X =$ ______, $\sigma_Y =$ ______,

$r = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} \simeq$ ______ coefficiente di correlazione storia-filosofia.

▶ Le due materie che presentano la maggiore correlazione lineare sono ______ ($r \simeq$ ______). Per tali materie l'indice di correlazione lineare è un buon indice perché ______ è abbastanza vicino a ______.
L'indice non è altrettanto buono per le coppie di materie ______ ($r \simeq$ ______) e ______ ($r \simeq$ ______), che hanno l'indice più vicino ______.