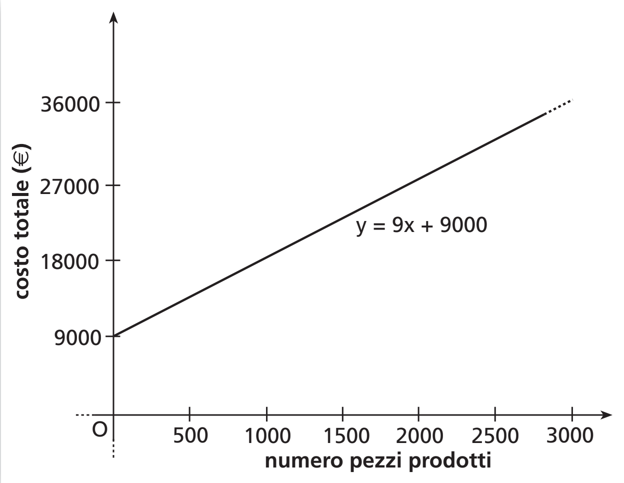
REALTÀ E MODELLI SCHEDA DI LAVORO

1 **Il costo della caffettiera**

Una piccola fabbrica produce un nuovo tipo di caffettiera in un dato periodo di tempo, sostenendo costi fissi pari a circa € 9000 e costi variabili quantificabili in € 9 per ogni unità prodotta.

- ▶ Esprimi in funzione del numero x di pezzi prodotti i costi totali sostenuti dall'azienda e il costo medio unitario per ogni pezzo prodotto.
  Rappresenta graficamente la funzione «costo totale» e la funzione «costo medio unitario» tenendo conto che nel periodo considerato l'azienda può produrre al massimo 3000 unità.
- ▶ Il costo unitario diminuisce all'aumentare del numero di pezzi prodotti. Per studiare meglio questo aspetto, calcola la variazione percentuale della diminuzione di costo unitario corrispondente all'aumento di 100 pezzi prodotti, nei due casi in cui inizialmente i pezzi prodotti siano 1000 oppure 2000.
- ▶ Dopo un'indagine di mercato si valuta che le caffettiere possano essere vendute a un prezzo massimo di € 16. Considerato che le spese di distribuzione sono di circa € 1800 fisse aumentate di € 0,50 per ogni pezzo, calcola qual è il minimo numero di pezzi da produrre per non andare in perdita.

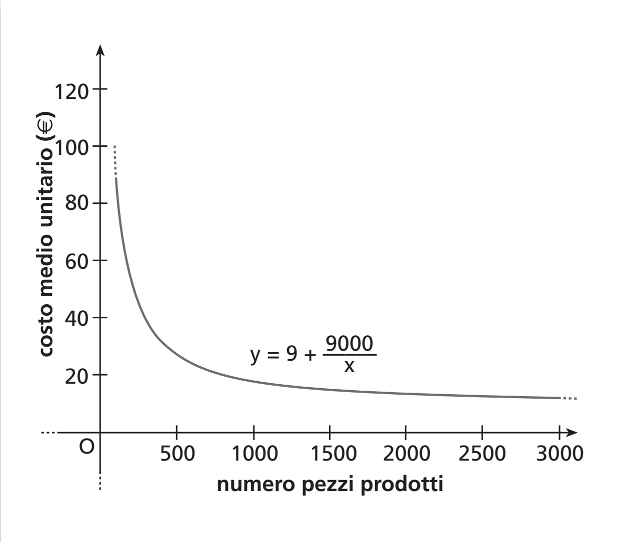
▶ Il costo totale per la produzione di x pezzi è espresso dalla funzione $C_T(x) =$ ______ , con $0 \leq x \leq$ ______ .
Il grafico è un ______ appartenente alla retta di coefficiente angolare ______ e ______ 9000.



▶ **Figura 1**

Il costo medio unitario si ottiene ______ il costo totale ______ perciò $C_M(x) = 9 +$ ______ , con 0 ______ $x \leq 3000$.

Il grafico è una parte di ______ con asintoto orizzontale ______ e asintoto ______ l'asse y, delimitato dall'asse y e dal punto ______ .



▶ **Figura 2**

Notiamo che in questo caso x deve essere non nullo. Dal punto di vista «produttivo» non ha infatti senso domandarsi qual è il costo unitario per 0 pezzi prodotti. Se la produzione è nulla, si hanno solo i costi fissi di 9000 €; se si produce un solo pezzo, allora il costo medio unitario è $C_M(1) = 9009$, e infatti il grafico dell'iperbole passa per il punto ____.
Da notare anche che in questo tipo di grafici descriviamo, per semplicità, con una linea continua un fenomeno che in realtà dovrebbe essere rappresentato per punti (poiché il numero di pezzi prodotti è un numero ____, non ____).

- Bisogna calcolare i seguenti rapporti:

$$R_1 = \frac{C_M(1100) - C_M(\underline{\qquad})}{1100 - \underline{\qquad}} \quad \to \quad R_1 = \frac{9 + \frac{9000}{1100} - \left(\underline{\qquad\qquad}\right)}{100} \simeq -0{,}0082 \quad \to \quad R_1 \simeq -0{,}82\%,$$

$$R_2 = \frac{C_M(\underline{\qquad}) - C_M(2000)}{\underline{\qquad\qquad}} \quad \to \quad R_2 = \frac{\underline{\qquad\qquad} - \left(9 + \frac{9000}{2000}\right)}{\underline{\qquad}} \simeq -0{,}0021 \quad \to \quad R_2 \simeq -0{,}21\%.$$

Si può notare che ____ del numero di pezzi prodotti, la percentuale di ____ del costo unitario ____

- Per non andare in perdita deve essere:

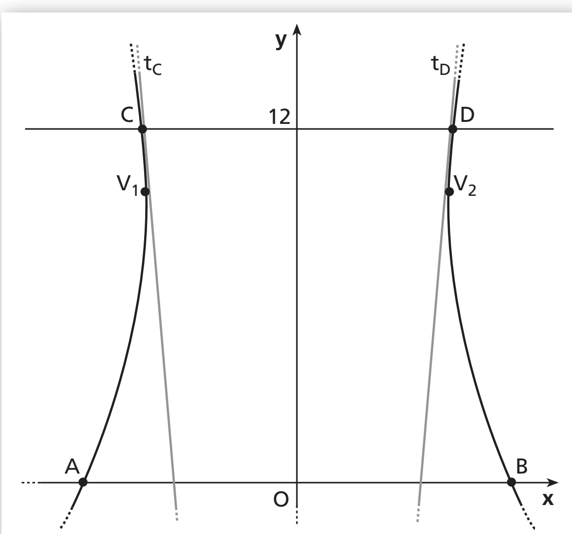
$$\underline{\qquad} \geq (9x + 9000) + (\underline{\qquad\qquad}) \quad \to \quad x \geq 1662.$$

2 Torre di raffreddamento

Il profilo di molte torri di raffreddamento di centrali nucleari ha la forma di un'iperbole.

- Rappresenta nel piano cartesiano gli archi di iperbole di equazione $x^2 - \frac{(y-10)^2}{100} = 1$ delimitati dall'asse delle ascisse (nei punti A e B con $x_A < x_B$) e dalla retta $y = 12$ (nei punti C e D con $x_C < x_D$). Tali archi rappresentano il profilo di una torre di raffreddamento.
- In assenza di vento il vapore che fuoriesce dalla torre occupa, con buona approssimazione, la zona delimitata dalle due rette tangenti all'iperbole nei punti C e D. Scrivi l'equazione della porzione del fascio di rette (generato dalle tangenti) compresa tra le tangenti stesse.

- L'iperbole ha centro in $(0; \underline{\quad})$, asintoti $y = \pm 10\underline{\quad} + \underline{\quad}$, vertici in $(\underline{\quad}; 10)$; interseca l'asse delle ascisse in $A(\underline{\qquad})$ e $B(\underline{\quad}; 0)$; passa per $C\left(-\frac{\sqrt{26}}{5}; \underline{\quad}\right)$ e $D\left(\underline{\quad}; \underline{\quad}\right)$.



◀ Figura 3

▶ Per trovare l'equazione della tangente in D conviene traslare verticalmente l'iperbole di ____, in modo da poter usare la formula di sdoppiamento.

L'equazione dell'iperbole traslata è ____ $= 1$ e l'equazione della tangente in $D'\left(\frac{\sqrt{26}}{5}; \ \_\_\_\_ \right)$ è

____ $= 1$ ovvero $y = 10\sqrt{26}\,x - 50$.

Traslando verticalmente di ____ questa retta si ottiene l'equazione della ____ all'iperbole data in ____, che è t_D: $y = 10\sqrt{26}\,x - 40$.
Per ottenere l'equazione della tangente in C basta trovare l'equazione della retta ____ rispetto all'asse ____, ovvero t_C: $y =$ ____.
Le due rette t_C e t_D si intersecano in (____) e il fascio proprio di rette che generano ha equazione $y = mx -$ ____.
Quindi le rette comprese tra t_C e t_D avranno equazione $y = mx - 40$ con $m \leq$ ____ oppure $m \geq$ ____.

3 Le sonde Voyager

La sonda spaziale Voyager 2 è stata una delle prime esploratrici del sistema solare esterno, ed è ancora in attività. Lanciata il 20 agosto 1977 dalla NASA, poco prima della gemella Voyager 1, fu immessa in un'orbita che la portò a sfiorare i due pianeti giganti, Giove e Saturno. Durante il viaggio i tecnici si resero conto che potevano sfruttare un allineamento planetario piuttosto raro per far proseguire la sonda verso Urano e Nettuno.
Dalla legge di gravitazione universale si deduce che se un corpo (per esempio la sonda) arriva nella sfera di influenza gravitazionale di un altro corpo (per esempio Saturno) con una velocità sufficientemente elevata, non precipita né si mette in rotazione attorno al secondo corpo, ma si allontana seguendo una traiettoria iperbolica di cui il pianeta è un fuoco.
La traiettoria di Voyager 2 vicino a Saturno può essere descritta dalla seguente equazione (i valori sono espressi in kilometri):

$$\frac{x^2}{1{,}109 \cdot 10^{11}} - \frac{y^2}{1{,}320 \cdot 10^{11}} = 1,$$

mentre per Voyager 1 l'equazione analoga è:

$$\frac{x^2}{2{,}761 \cdot 10^{10}} - \frac{y^2}{9{,}502 \cdot 10^{10}} = 1.$$

▶ Quale delle due sonde si è avvicinata di più a Saturno?

▶ Quale delle due traiettorie ha eccentricità maggiore?

▶ Dato che Saturno si trova nel ____ dell'iperbole, per trovare la minima distanza tra la navicella e il pianeta basta calcolare ____, ovvero ____ del fuoco.
Nell'iperbole si ha $c^2 =$ ____, da cui:

per Voyager 1: $c^2 =$ ____ $\rightarrow \quad c \simeq 3{,}502 \cdot 10^5$,

per Voyager 2: $c^2 =$ ____ $\rightarrow \quad c \simeq 4{,}928 \cdot 10^5$.

La minima distanza di Voyager 1 da Saturno è stata 350 200 km, mentre per Voyager 2 è stata 492 800 km. La sonda che si è avvicinata di più a Saturno è ____.

▶ L'eccentricità è data da ____, perciò si ottiene:

per Voyager 1: $e =$ ____ $\simeq 2{,}107$,

per Voyager 2: $e = \dfrac{4{,}928 \cdot 10^5}{3{,}330 \cdot 10^5} \simeq$ ____.

La traiettoria di Voyager 1 ha eccentricità ____.