REALTÀ E MODELLI SCHEDA DI LAVORO

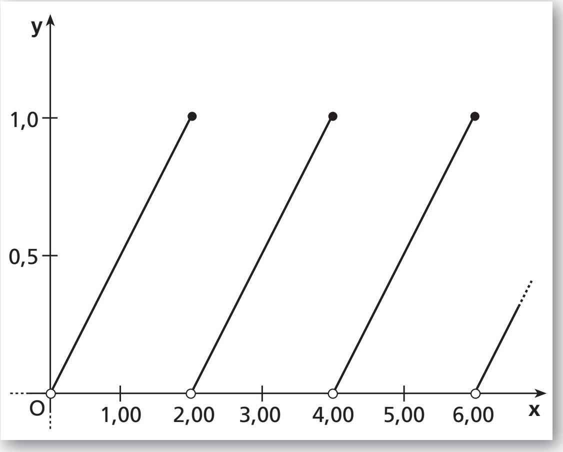
1 La funzione a dente di sega

La funzione a «dente di sega» rappresenta una forma d'onda non sinusoidale; il suo andamento è lineare crescente per un certo intervallo di tempo, dopodiché scende repentinamente per poi tornare a salire. Tale onda è fondamentale nel campo dell'elettronica e dell'acustica, per esempio per riprodurre i suoni degli strumenti ad arco nei sintetizzatori analogici. Considera la seguente funzione:

$$f(x) = 0{,}5x - k \quad \text{per} \quad 2k < x \leq 2k + 2,\ k \in \mathbb{N}.$$

- ▶ Rappresenta il grafico della funzione.
- ▶ Stabilisci se è periodica e indicane il periodo.
- ▶ Determina il dominio, il codominio e studiane il segno.
- ▶ Analizza la sua continuità.

▶ La funzione è composta da segmenti appartenenti a rette con coefficiente angolare $m =$ ____ e ordinata all'origine $q =$ ____. Il grafico della funzione è il seguente:



◀ Figura 1

▶ Limitatamente all'intervallo $]0; +\infty[$, la funzione è periodica di periodo ____.
Infatti, se x_0 è tale che $2k_0 < x_0 \leq 2k_0 + 2$, allora:

$$\_\_\_\_ < x_0 + 2 \leq \_\_\_\_ \rightarrow \_\_\_\_ < x_0 + 2 \leq \_\_\_\_,$$
$$f(x_0) = 0{,}5x_0 - k_0,$$
$$f(x_0 + 2) = \_\_\_\_ = \_\_\_\_ = 0{,}5x_0 - k_0 = f(x_0).$$

▶ Il dominio è $]0; +\infty[$, il codominio è l'intervallo ____, quindi la funzione è sempre ____.

▶ La funzione presenta infiniti punti di ____ di ____ specie in corrispondenza dei punti $x = 2k$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Infatti, considerando per esempio $x = 2$, si ha:

$$\lim_{x \to 2^-} (0{,}5x) = 1 = f(2),\ \lim_{x \to 2^+} (0{,}5x - 1) = 0.$$

In ogni punto $x = 2k$ la funzione risulta ____ da sinistra.

2 La carica di un condensatore

Il condensatore è un dispositivo in grado di accumulare cariche elettriche quando è sottoposto a una differenza di potenziale. Sapendo che la legge fisica che descrive la quantità di carica Q accumulata da un condensatore in funzione del tempo è espressa dalla formula:

$$Q(t) = C \cdot E \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right);$$

- scrivi la funzione relativa a un condensatore con capacità $C = 8{,}5 \cdot 10^{-4}$ F sottoposto a una differenza di potenziale $E = 12{,}0$ V, inserito in un circuito con resistenza complessiva $R = 300\ \Omega$;
- calcola la quantità di carica massima che il condensatore può accumulare;
- stabilisci dopo quanto tempo il condensatore si è caricato al 90% del suo massimo.

- Sostituiamo i parametri dati (omettendo le unità di misura):

$$Q(t) = 8{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot 12 \cdot \left(1 - e^{-\underline{\qquad}}\right) = \underline{\qquad\qquad}.$$

- La funzione è ____, in quanto all'aumentare del tempo t l'esponente di e diventa un numero ____ sempre ____ e quindi la parentesi tonda assume valori sempre ____. Per calcolare la carica massima che il condensatore può accumulare bisogna dunque calcolare il limite della funzione quando il tempo tende all'infinito:

$$\lim_{t \to +\infty} \underline{\qquad\qquad} = 0{,}0102.$$

Perciò il condensatore può teoricamente sostenere 0,0102 coulomb di carica.

- Dobbiamo risolvere l'equazione:

$$\underline{\qquad\qquad} = 0{,}0102 \cdot \underline{\qquad\qquad}$$

da cui:

$$e^{-\frac{t}{0{,}255}} = 0{,}1 \rightarrow -\frac{t}{0{,}255} = \underline{\qquad} \rightarrow t = \underline{\qquad\qquad} = 0{,}59 \text{ s}.$$

3 **Il rally**

Durante una gara di rally, una macchina percorre un tratto di strada la cui traiettoria può essere descritta dalla funzione $y = \frac{3-x^2}{x+1}$, con $x < -\sqrt{3}$.

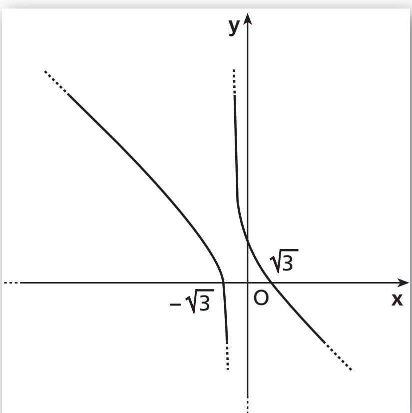
- Disegna il grafico approssimativo della funzione.
- Quale inclinazione massima (rispetto all'asse x) dovrebbe avere un muro di protezione rettilineo che costeggia la strada affinché non si verifichi un'uscita di strada?
- Studia la continuità della funzione che rappresenta la traiettoria nel suo dominio naturale.
- Determina eventuali asintoti.

- Il dominio naturale è ___. Le intersezioni con gli assi sono i punti di coordinate ___, $(\pm\sqrt{3}; 0)$. I limiti agli estremi del dominio sono:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3-x^2}{x+1} = \_\_\_, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{3-x^2}{x+1} = \_\_\_;$$

$$\lim_{x\to-1^-} \frac{3-x^2}{x+1} = \_\_\_, \quad \lim_{x\to-1^+} \frac{3-x^2}{x+1} = \_\_\_.$$

Quindi ___ è asintoto ___ e il grafico approssimativo della funzione è il seguente.



◀ **Figura 2**

- In questo caso bisogna determinare l'asintoto ___ della funzione. In particolare basta calcolarne il coefficiente angolare per stabilire l'inclinazione massima che il muro dovrebbe avere per evitare l'incidente (poiché il tratto di strada è considerato per x ___, calcoliamo il limite a $-\infty$):

$$m = \lim_{x\to-\infty} \_\_\_ = \lim_{x\to-\infty} \_\_\_ \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \_\_\_ = -1,$$

$$m = -1 \rightarrow \text{tg}\alpha = -1 \rightarrow \alpha = \_\_\_.$$

La direzione limite del muro di protezione coincide con quella della bisettrice del ___ e ___ quadrante.

- La funzione è continua su $\mathbb{R} - \{-1\}$ e $x = -1$ è asintoto ___. Il punto $x = -1$ rappresenta una discontinuità di ___.

- Dai punti precedenti sappiamo che $x = -1$ è asintoto verticale e che non esistono asintoti orizzontali.

Per l'eventuale asintoto obliquo, dal primo punto abbiamo ricavato:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -1.$$

Vediamo se esiste finito anche il valore di q:

$$q = \lim_{x\to-\infty} \_\_\_ = \lim_{x\to-\infty} \_\_\_ = 1.$$

Quindi $y = -x + 1$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$.
Poiché:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \boxed{} = \lim_{x \to +\infty} \boxed{} = -1 \text{ e}$$

$$q = \lim_{x \to +\infty} \boxed{} = \lim_{x \to +\infty} \boxed{} = 1$$

la retta $y = -x + 1$ è asintoto obliquo anche per $x \to +\infty$.

4 IRPEF: imposta sul reddito delle persone fisiche

L'IRPEF è la tassa che ogni anno devono pagare tutti i cittadini italiani che hanno un reddito.
La percentuale di tassa da pagare aumenta in base al reddito secondo la seguente tabella.

Scaglioni reddito 2010	Aliquota	Irpef lordo 2010
da 0 a 15 000 euro	23%	23% del reddito
da 15 000,01 a 28 000 euro	27%	3450 + 27% sulla parte eccedente i 15 000 euro
da 28 000,01 a 55 000 euro	38%	6960 + 38% sulla parte eccedente i 28 000 euro
da 55 000,01 a 75 000 euro	41%	17 220 + 41% sulla parte eccedente i 55 000 euro
oltre 75 000 euro	43%	25 420 + 43% sulla parte eccedente i 75 000 euro

▶ Scrivi l'espressione analitica della funzione che fornisce la tassa in base al reddito. Si tratta di una funzione continua?

▶ Indichiamo con R il reddito e con $T(R)$ la tassa. La funzione $T(R)$ si può esprimere come funzione a tratti.

$$T(R) = \begin{cases} \boxed{} & \text{se } 0 \leq R \leq 15000 \\ 3450 + \dfrac{27}{100}(R - 15000) & \text{se } 15000 < R \leq 28000 \\ \boxed{} & \text{se } 28000 < R \leq 55000 \\ \boxed{} & \text{se } 55000 < R \leq 75000 \\ 25420 + \dfrac{43}{100}(R - 75000) & \text{se } R > 75000 \end{cases}$$

La funzione ha come dominio $[0; +\infty[$. Per stabilire se è $\boxed{}$ bisogna calcolare i limiti destri e sinistri nei punti in cui cambia la forma analitica della funzione.

$$\lim_{R \to 15000^-} \boxed{} = \lim_{R \to 15000^+} \left[3450 + \frac{27}{100}(R - 15000)\right] = T(15000) = 3450$$

$$\lim_{R \to 28000^-} \left[3450 + \frac{27}{100}(R - 15000)\right] = \lim_{R \to 28000^+} \left[\boxed{}\right] = T(28000) = 6960$$

$$\lim_{R \to 55000^-} \left[\boxed{}\right] = \lim_{R \to 55000^+} \left[\boxed{}\right] = T(55000) = 17220$$

$$\lim_{R \to 75000^-} \left[\boxed{}\right] = \lim_{R \to 75000^+} \left[25420 + \frac{43}{100}(R - 75000)\right] = T(75000) = 25420$$

La funzione è perciò continua in ogni punto del suo dominio.