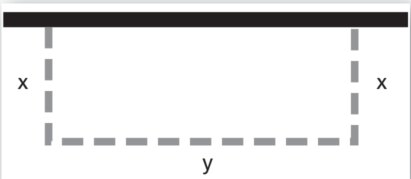
REALTÀ E MODELLI SCHEDA DI LAVORO

1 La siepe

Sul retro di una villetta deve essere realizzato un piccolo giardino rettangolare di 50 m^2, riparato da una siepe posta lungo il bordo.

- ▶ Dato che un lato del giardino è occupato dalla parete della casa, quali dimensioni deve avere il giardino per minimizzare la lunghezza e, di conseguenza, il costo della siepe?

▶ Schematizziamo la situazione in figura.



◀ **Figura 1**

Indichiamo con L la lunghezza della siepe da allestire. Tenendo conto che un lato è già occupato (dalla parete della casa) si avrà:

$$L = \ldots$$

con la condizione che la superficie sia uguale a :

$$xy = 50 \rightarrow y = \frac{50}{x} \rightarrow L = \ldots .$$

Per minimizzare la funzione calcoliamo la sua derivata prima rispetto alla variabile x:

$$\frac{dL}{dx} = \ldots .$$

Studiamo il segno della derivata prima:

$$\ldots \geq 0 \rightarrow \ldots \geq 0 \rightarrow \ldots \rightarrow x \leq -5 \vee x \geq 5.$$

Ignoriamo la soluzione … poiché x rappresenta la … di un rettangolo e quindi è … .

La soluzione $x = 5$ rappresenta un … della funzione in quanto per … è $f'(x) < 0$, per … è $f'(x) > 0$.

Il giardino con la siepe di lunghezza minima avrà dimensioni $x =$ … e $y =$ … m.

2 I pacchetti regalo

Un'azienda produttrice di confezioni regalo deve produrre scatole a forma cilindrica in modo tale che, a parità di volume, sia minima la superficie totale della scatola e quindi la quantità di carta regalo da utilizzare per il suo confezionamento.

- ▶ Quali caratteristiche devono avere le dimensioni del cilindro?
- ▶ Nel caso in cui la carta da regalo costasse 0,90 euro/m^2, e il raggio del cilindro fosse di 6 cm, quanto costerebbe alla ditta confezionare 1000 scatole di superficie minima? (Considera che, a causa dei lembi di carta da sovrapporre, serve circa il 20% di carta in più rispetto all'effettiva superficie da coprire.)

▶ Indichiamo con r il raggio di base e con h l'altezza della scatola cilindrica. Il suo volume sarà:

$$V = \pi r^2 h \rightarrow h = \ldots ,$$

e la superficie totale:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

Riscriviamo la superficie totale in funzione solo del raggio:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh = \square = \square.$$

Deriviamo rispetto alla variabile r la funzione ottenuta e studiamone il segno:

$$\frac{dA}{dr} = \square,$$

$$4\pi r - \frac{2V}{r^2} \,\square\, 0 \;\rightarrow\; 4\pi r^3 - 2V \,\square\, 0 \;\rightarrow\; 4\pi r^3 \,\square\, 2V \;\rightarrow\; r^3 \,\square\, \frac{V}{2\pi} \;\rightarrow\; r \,\square\, \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Quindi la superficie $A(r)$ è $\ldots$ per $0 < r < \square$ e crescente per $r \geq \square$.

Il punto $r = \square$ rappresenta un punto di minimo per la funzione $A(r)$. Il valore di h corrispondente è:

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \square = \square \;\rightarrow\; h = \square = \square = \square.$$

La forma migliore per la scatola cilindrica è quella con altezza uguale al $\ldots$.

▶ Se il cilindro è quello di superficie minima, cioè ha $\ldots$, allora sarà $r = 6$ cm e $h = 12$ cm.
La superficie da coprire di una scatola è:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \simeq \square = \square = \square.$$

La superficie da confezionare per 1000 scatole, considerando lo scarto di carta necessario, di circa il 20%, sarà:

$$A_{\text{tot}} = \square = \square \simeq 83 \text{ m}^2.$$

Poiché la carta regalo costa 0,90 euro/m^2, la spesa sarà:

$$\text{Spesa} \simeq \square \simeq 75 \text{ euro}.$$

3 Il flacone di profumo

Un'azienda produce una bottiglietta per profumo con la forma di una sfera sormontata da un cilindro. La bottiglietta deve contenere 70 ml di profumo e il foro di passaggio tra la sfera e il cilindro deve avere il raggio di 0,7 cm.

▶ Trova il raggio della sfera che rende minimo il peso della bottiglietta (lo spessore del cristallo è di circa 1 mm e il suo peso specifico è di 2,9 kg/dm^3; approssima la calotta sferica – che viene tolta a causa dell'innesto del cilindro – con la base del cilindro stesso; trascura il taglio della sfera nella parte inferiore della boccetta, necessario per creare la superficie di appoggio).

▶ Determina l'altezza totale e il peso della bottiglietta.

▶ Per ottenere il peso minimo basta minimizzare la superficie totale della bottiglietta.
Indicato con x il raggio della sfera (in cm) si determina l'altezza h del cilindro, utilizzando il volume (l'unità di misura usata è il cm^3):

$$70 = \square \;\rightarrow\; h = \square \simeq 45{,}5 - 2{,}7x^3.$$

Da qui ricaviamo anche la limitazione superiore per x, dato che deve essere:

$$h > 0 \;\rightarrow\; \qquad > 0 \;\rightarrow\; x \leq 2{,}5.$$

La superficie totale S della bottiglietta è data dalla superficie laterale del cilindro e dalla superficie della sfera, da cui bisogna togliere una piccola calotta che consideriamo uguale alla base del cilindro:

$$S = \qquad .$$

La funzione da minimizzare risulta:

$$S(x) = \qquad \text{con } 0 < x \leq 2{,}5.$$

Derivando si ottiene:

$$S'(x) = \qquad ,$$
$$S'(x) > 0 \;\rightarrow\; \qquad \geq 0 \;\rightarrow\; \qquad .$$

La funzione S è quindi crescente in e decrescente in . Per $x \simeq 0{,}7$ si ha un relativo.
Dato che $S(0) = 198{,}6$ e $S(2{,}5) = 91{,}4$ la superficie della bottiglietta si ottiene con il raggio della sfera uguale a circa .

▶ L'altezza del cilindro è:

$$h = \qquad \simeq 3{,}3\ \text{cm}.$$

L'altezza complessiva della bottiglietta, se trascuriamo la riduzione del diametro della sfera dovuta all'innesto del cilindro, è:

$$H = \qquad = \qquad = 8{,}3\ \text{cm}.$$

Per calcolare il peso della bottiglietta approssimiamo il volume del materiale utilizzato mediante il prodotto della superficie totale per lo spessore del cristallo:

$$\textit{Peso} = \textit{Volume del cristallo} \cdot \textit{Peso specifico} = 91{,}4 \cdot 0{,}1 \cdot 2{,}9 = 26{,}5\ \text{g}.$$

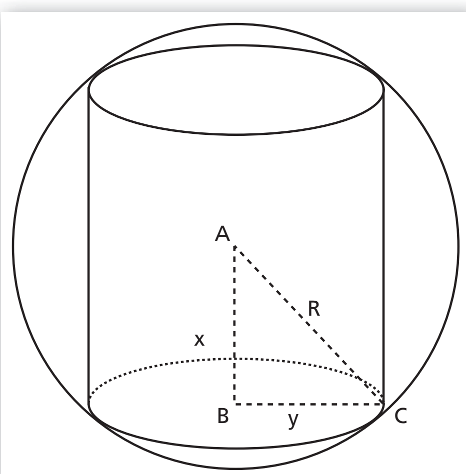
4 **L'uovo di cioccolato**

All'interno di un «uovo» di cioccolato di forma sferica si inserisce una scatola, di forma cilindrica, che contiene la sorpresa.

▶ Trova il volume massimo che può avere la scatola supponendo che l'uovo contenitore abbia raggio R.

▶ Calcola il rapporto tra il diametro di base e l'altezza del cilindro trovati al punto precedente.

▶ Descriviamo la situazione nella seguente figura.



◀ **Figura 2**

Indichiamo con y il raggio di base del cilindro, con x metà della sua altezza e con R il raggio della sfera.
Il volume del cilindro sarà:

$$V = \boxed{\quad}.$$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo ABC otteniamo:

$$\boxed{\quad} \rightarrow y^2 = \boxed{\quad}.$$

Il volume del cilindro in funzione di R ed y è quindi:

$$V = \boxed{\quad} = \boxed{\quad}.$$

Deriviamo rispetto alla variabile x e studiamo il segno della derivata prima:

$$\frac{dV}{dx} = \boxed{\quad},$$

$$\boxed{\quad} > 0 \rightarrow \boxed{\quad}.$$

Considerato che $0 < x < R$ per ragioni geometriche, abbiamo che $V(x)$ è crescente per $\boxed{\quad}$ e decrescente per $\boxed{\quad}$. Il massimo del volume del cilindro si ha per $x = \boxed{\quad}$; il volume corrispondente della scatola cilindrica è:

$$V = \boxed{\quad} = \boxed{\quad} = \boxed{\quad} = \boxed{\quad}.$$

▶ Il rapporto tra il diametro di base e l'altezza è:

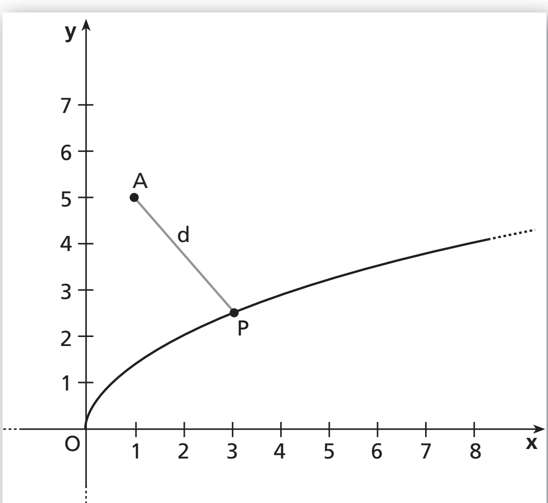
$$\frac{2y}{2x} = \frac{y}{x} = \boxed{\quad} = \sqrt{2}.$$

5 **Il maratoneta**

Un atleta sta partecipando a una maratona; in un tratto il percorso segue una traiettoria di equazione $y^2 = 2x$ (con $x \geq 0$), rispetto a un opportuno sistema di assi. Nello stesso sistema, il suo allenatore si trova nel punto $A(1; 5)$ e gli deve lanciare una spugna bagnata per farlo idratare.

▶ In che punto del percorso il maratoneta si troverà più vicino al suo allenatore per ricevere la spugna?

▶ Disegniamo la traiettoria del percorso e il punto in cui si trova l'allenatore.



◀ **Figura 3**

L'equazione della traiettoria ha come grafico la parte di parabola, con vertice nell'origine e asse coincidente con l'asse x, che attraversa il primo quadrante.

La distanza tra il punto $A(1; 5)$ e il punto $P(x; y)$ generico della curva è:

$d =$ ____ .

Se P appartiene alla parabola avrà coordinate P ____ e la distanza da A diventa:

$d =$ ____ .

Invece di minimizzare d, minimizziamo d^2 in quanto il minimo di d coincide con il minimo di d^2:

$d^2 =$ ____ .

Deriviamo rispetto ad y:

$f'(y) =$ ____ $=$ ____ $= y^3 - 10$.

Studiamo il segno della derivata:

$y^3 \geq 10 \rightarrow$ ____ $\simeq 2{,}2$,

$f'(y) < 0$ per ____ , $f'(y) > 0$ per $y > \sqrt[3]{10}$.

Perciò il punto $y =$ ____ corrisponde a un ____ relativo della funzione.
Il punto in cui il maratoneta si troverà più vicino al suo allenatore avrà coordinate:

$P\left(\frac{y^2}{2}; y\right) =$ ____ $\simeq$ ____ .