REALTÀ E MODELLI SCHEDA DI LAVORO

1 La miscela di caffè

Una torrefazione di caffè acquista annualmente 300 q di caffè di tipo arabica e 200 q di tipo robusta che utilizza per preparare due tipi di miscele da vendere direttamente ai consumatori:

- prima qualità: 90% di arabica e 10% di robusta;
- seconda qualità: 40% di arabica e 60% di robusta.

La prima qualità viene venduta al prezzo di € 12 al kg e la seconda al prezzo di € 9 al kg.

▶ Determina quanti kilogrammi di miscela della I e della II qualità deve preparare la torrefazione per ottenere il massimo ricavo.

▶ Entro quali limiti può variare il rapporto tra i prezzi al kilogrammo delle due miscele, in modo che risulti conveniente produrle entrambe?

▶ Indichiamo con x e y, rispettivamente, i kilogrammi di miscela della I e della II qualità.

La funzione ____ è:

$$z = 12x + 9y.$$

Il sistema dei vincoli è:

$$\begin{cases} 0,9x + \underline{\qquad}\,y \leq 30\,000 \\ 0,1x + 0,6y \leq 20\,000 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$

La regione ____ è un poligono con vertici:

$$O(0; 0), \qquad A\left(\frac{100\,000}{3}; 0\right), \qquad B(\underline{\qquad}; 30\,000), \qquad C\left(0; \frac{\underline{\qquad}}{3}\right).$$

La funzione obiettivo, in corrispondenza, assume i valori:

$$z(O) = 0, \quad z(A) = \underline{\qquad}, \qquad z(B) = 510\,000, \qquad z(C) = 300\,000,$$

e assume il massimo nel punto B.

Si osservi che, essendo un problema a valori discreti, avremmo dovuto fare degli opportuni arrotondamenti per le coordinate dei punti A e C. Poiché il ____ è stato raggiunto in B, che è a valori interi, il metodo usato non ha influito sul risultato.

▶ Il rapporto tra i due prezzi è dato dall'inclinazione della funzione obiettivo in valore assoluto $\frac{12}{9} = \frac{4}{3}$.

Aumentando il prezzo della seconda miscela, z va a sovrapporsi con i punti del segmento BC che ha inclinazione in valore assoluto ____, mentre diminuendo il suo prezzo, z va a sovrapporsi ai punti del segmento AB che ha inclinazione in valore assoluto $\frac{9}{4}$. Il rapporto dei prezzi deve pertanto essere compreso tra $1,\overline{3}$ e ____ per restare in una posizione di massimo ricavo con entrambe le produzioni.

2 **La produzione di cinture di pelle**

Un artigiano produce e vende direttamente cinture di pelle per uomo e per donna conseguendo un utile di € 50 per le prime e € 70 per le seconde.
Per produrre i due articoli si rifornisce periodicamente del quantitativo di cuoio pregiato, di non facile reperimento, necessario per attuare un ciclo produttivo e di due tipi di fibbie. Il cuoio è fornito in pezze per un totale di 400 m^2; per ogni cintura da uomo si ha in media un consumo di 16 dm^2 di cuoio e per ogni cintura da donna di 10 dm^2. Le fibbie sono fornite in lotti da 200 pezzi e, in base alle richieste che si prevedono, risulta necessario comprare 10 lotti di fibbie per le cinture da uomo e 8 per le cinture da donna.
Un altro artigiano, suo amico ma concorrente, propone di vendergli le materie prime.

- Determina i quantitativi di cinture dei due tipi che l'artigiano programma per ogni ciclo.
- Determina quali prezzi minimi dovrebbe offrire il secondo artigiano per rendere conveniente l'acquisto delle materie prime da parte del primo artigiano.
- Determina il legame fra i due modelli di Programmazione Lineare precedenti.

- Indichiamo con x e y, rispettivamente, il numero di cinture da uomo e da donna.

La funzione obiettivo è $z = \underline{\quad\;} x + 70y$.

Il sistema dei vincoli è: $\begin{cases} 0{,}16x + \underline{\quad\;} y \leq 400 \\ x \leq 2000 \\ y \leq 1600 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$

La regione ammissibile è un poligono di vertici:

$O(0; 0)$, $A(\underline{\qquad}; 0)$, $B(2000; 800)$, $C(1500; 1600)$, $D(0; 1600)$.

I valori della funzione obiettivo sono:

$z(O) = 0$, $z(A) = \underline{\qquad\quad}$, $z(B) = 156\,000$, $z(C) = \underline{\qquad\quad}$, $z(D) = 112\,000$.

Il ____________ è nel punto C, a cui corrisponde un guadagno di € 187 000.

- I prezzi minimi che deve offrire il concorrente devono essere tali che egli possa ricavare almeno tanto quanto era il suo guadagno programmato che, per logica di mercato, è pari a quello programmato dal primo artigiano.

p_1, p_2, p_3 sono rispettivamente i prezzi minimi del cuoio, delle fibbie da uomo e delle fibbie da donna;

$\underline{\qquad} p_1 + p_2$ è il prezzo complessivo del cuoio e della fibbia per la cintura da uomo e deve essere almeno di € 50, cioè il ricavo dell'artigiano;

$0{,}10\, p_1 + p_3$ è il prezzo complessivo del cuoio e della fibbia per la cintura da donna e deve essere almeno di € ____, cioè il ricavo dell'artigiano.

Il costo complessivo che il primo artigiano deve sostenere e che il concorrente deve minimizzare è:

$z = 400\, p_1 + \underline{\qquad} p_2 + 1600\, p_3$, con il sistema dei vincoli:

$$\begin{cases} 0{,}16p_1 + p_2 \geq 50 \\ 0{,}10p_1 + \underline{\quad\;} \geq 70 \\ p_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

La soluzione risulta: $p_1 = 312{,}50$, $p_2 = 0$, $p_3 = \underline{\qquad}$ con $z = 187\,000$.

Il minimo della funzione del concorrente corrisponde al massimo della funzione del primo artigiano.

▶ Se confrontiamo le due funzioni obiettivo e i sistemi dei vincoli rileviamo le seguenti corrispondenze biunivoche fra i due modelli matematici.

Problema di massimo		Problema di minimo
• n ______	⟶	• m vincoli tecnici
• m ______ tecnici	⟶	• n variabili
• termini noti delle disequazioni dei vincoli	⟶	• coefficienti della funzione ______
• coefficienti funzione obiettivo	⟶	• termini noti delle disequazioni dei vincoli
• matrice ______ dei vincoli	⟶	• stessa matrice trasposta
• vincoli con relazione $\leq$	⟶	• vincoli con relazione $\geq$

3 Le scatole di cioccolatini

Un'industria dolciaria deve determinare i requisiti che deve avere una scatola tipo di cioccolatini. I cioccolatini sono di due tipi, A e B (fondenti e al latte), e in ogni scatola ce ne devono essere 40. Ogni cioccolatino del tipo A occupa una superficie di 8 cm^2 e ha un peso di 16 g; ogni cioccolatino di tipo B occupa una superficie di 5 cm^2 e ha un peso di 10 g. La superficie nella quale vanno collocati è al massimo di 400 cm^2 e il peso deve essere almeno di 480 g. I cioccolatini fondenti hanno un costo di € 0,70 ciascuno e quelli al latte di € 0,40 ciascuno; ogni scatola non può superare il costo complessivo di € 25. Il costo della confezione è trascurabile.

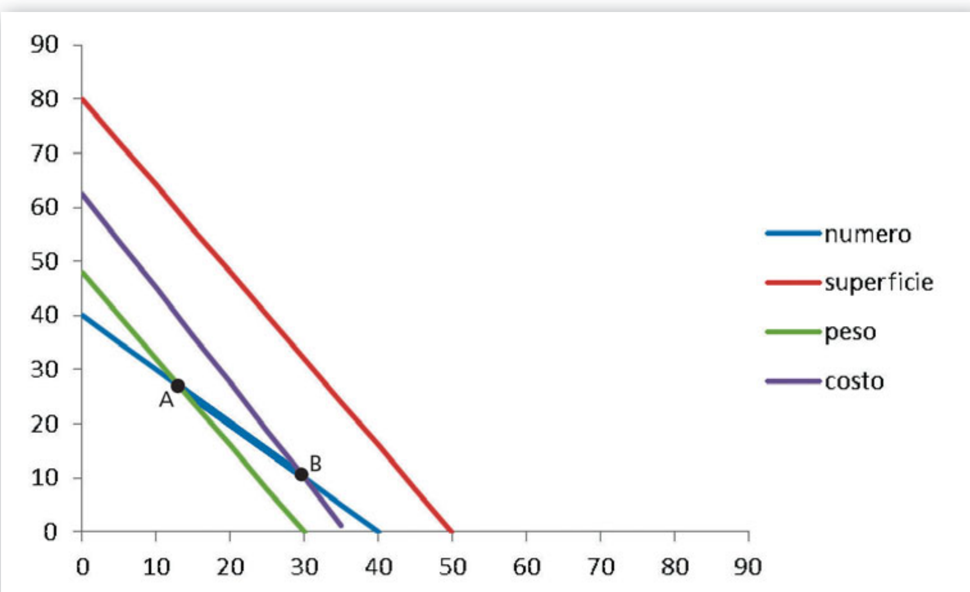
▶ Determina le combinazioni che soddisfano le condizioni poste.

▶ Determina la combinazione che minimizza il costo.

▶ Determina quale sarebbe la composizione della scatola se non vi fosse il limite del numero dei cioccolatini, restando invariate le altre indicazioni.

▶ Indichiamo con x e y, rispettivamente, il numero di cioccolatini fondenti e al latte.
I dati del problema portano alle seguenti relazioni:

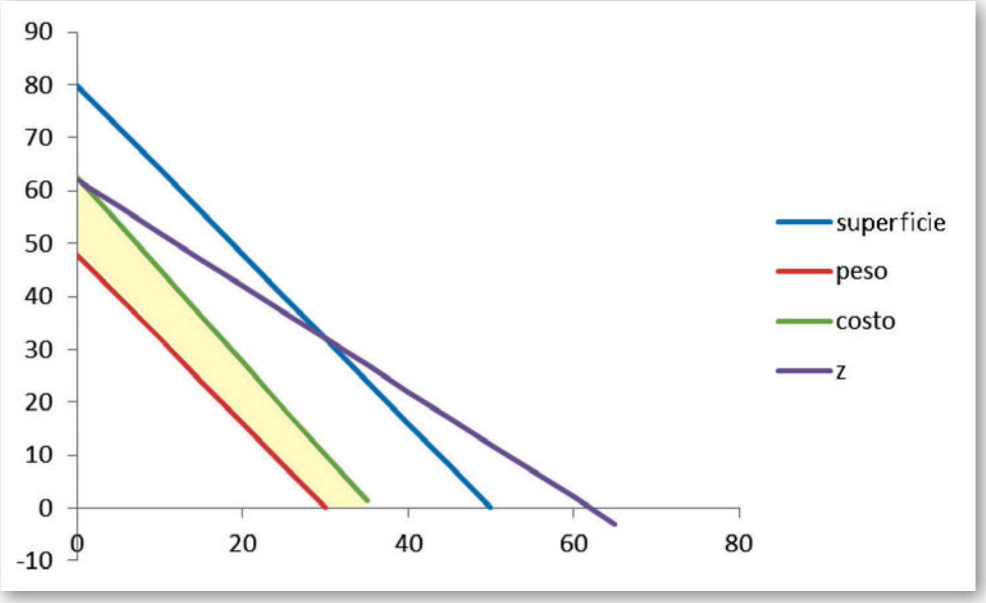
- numero dei cioccolatini: $x + y = 40$;
- superficie: $8x + 5y \leq 400$;
- peso: ___ $x + 10y \geq 480$;
- costo: $0{,}7x + 0{,}4y \leq$ ___ .



Le combinazioni che soddisfano le condizioni poste sono i punti, con coordinate intere, compresi sul segmento AB:

Punto $A\left(\frac{40}{3};\quad\right)$, quindi approssimando $A(13; 27)$; punto B (30; 10).

- La scatola del punto A ha un costo di € mentre quella del punto B di € 25, limite massimo posto dalle condizioni.
- Trasformiamo il vincolo del numero dei cioccolatini in funzione obiettivo: otteniamo $z = x + y$.



La regione ammissibile è la parte di piano compresa fra peso e costo. Il numero massimo di cioccolatini si ha nel punto (0;), cioè una scatola con solo 62 cioccolatini al latte.