# REALTÀ E MODELLI SCHEDA DI LAVORO

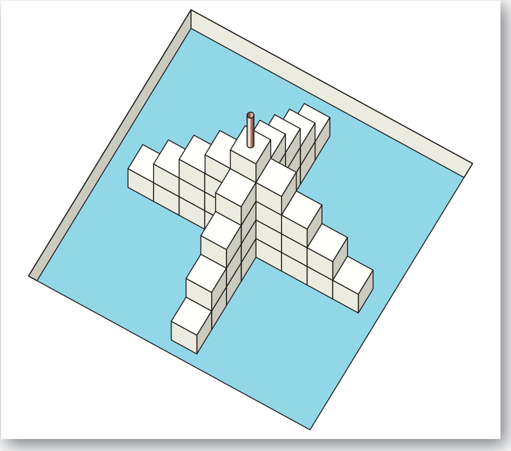
## 1 La fontana

Un architetto ha progettato una fontana un cui bozzetto preparatorio è riportato a lato. La struttura centrale è costituita da cubi di marmo sovrapposti: si passa dal livello inferiore a quello immediatamente superiore togliendo un cubo da ciascuna delle quattro ali. L'architetto utilizza la seguente formula per calcolare la quantità di cubi di marmo necessaria:

*numero totale di cubi* $= 2n^2 - n$,

dove $n$ indica il numero (naturale) dei livelli della struttura.

▶ Se ha a disposizione 66 cubi, quanti livelli riesce a costruire?



▶ Basta risolvere l'equazione:

$$2n^2 - n = 66 \rightarrow 2n^2 - n - 66 = 0.$$

Scomponiamo il polinomio in ______, scrivendolo nella forma:

$$2n^2 - 12n + 11n - 66 = 0.$$

Dal raccoglimento ______ otteniamo:

$$(2n + 11)(\quad\quad) = 0.$$

Applichiamo la legge di ______ del prodotto:

$$2n + 11 = 0 \quad \vee \quad \underline{\quad\quad} = 0 \quad \rightarrow \quad n = -5{,}5 \quad \vee \quad \underline{\quad\quad}.$$

Poiché il numero $n$ deve essere intero e positivo, l'unica soluzione ______ è $n =$ __: la fontana avrà pertanto __ livelli.

## 2 La lente d'ingrandimento

Una nonna non riesce a leggere i piccoli caratteri del quotidiano nemmeno con gli occhiali e prova con una lente d'ingrandimento trovata in un cassetto: l'immagine che vede varia a seconda della distanza tra la lente e il giornale. Il nipote consulta il suo manuale di fisica e scopre che la distanza focale $f$ della lente, la distanza $p$ tra l'oggetto e la lente e la distanza $q$ tra la lente e l'immagine sono legate dalla legge:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}.$$

Nel caso della lente di ingrandimento, l'immagine è virtuale e la distanza $q$ si deve considerare negativa.

▶ Ricava $p$ dalla formula precedente.

▶ La distanza focale della lente trovata è di 25 cm. Supponendo che la distanza tra lente e immagine sia di 40 cm ($q = 40$), quanto vale la distanza $p$ tra il giornale e la lente?

▶ Se la posizione di lettura più comoda per la nonna prevede una distanza lente-immagine di 55 cm e una distanza lente-giornale di 15 cm, che distanza focale deve avere una lente d'ingrandimento ottimale?

▶ $$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \rightarrow \frac{1}{p} = -\frac{1}{q} + \frac{1}{f} \rightarrow \frac{1}{p} = \frac{\quad\quad}{qf} \rightarrow p = \underline{\quad\quad}.$$

▶ I dati forniti sono $f = \boxed{\phantom{00}}$ cm, $q = 40$ cm. Ricaviamo:

$$p = \frac{qf}{q-f} = \frac{40 \cdot 25}{40 - 25} \simeq 67 \text{ cm},$$

quindi bisogna tenere il giornale alla distanza $p + q = 67 + 40 = 107$ cm dagli occhi.

▶ In questo caso è $p = 15$ cm e $q = 55$ cm, perciò l'equazione diventa:

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{55} = \boxed{\phantom{00}} \text{ da cui si ricava } f \simeq 11{,}8 \text{ cm}.$$

## 3 La sfida

Aldo e Giovanni amano i giochi matematici e spesso si sfidano. Aldo sostiene che, presi due numeri dispari $p$ e $q$ maggiori di 1, il prodotto di $p$ diminuito di 1 con il quadrato di $q$ diminuito di 1 è divisibile per 8, e il quoziente è un numero pari. Giovanni prova con qualche numero ed effettivamente verifica che è vero, però pensa che sia un caso fortuito.

▶ Dimostra questa proprietà.

▶ Poiché $p$ e $q$ sono numeri ______, li possiamo scrivere come:

$$p = 2k + 1, \quad q = 2h + 1, \quad \text{con } h, k \in \mathbb{N}.$$

Il prodotto richiesto è:

$$(p-1) \cdot (\boxed{\phantom{0000}}) = (2k + 1 - 1) \cdot (4h^2 + 4h + 1 - 1) = 2k(\boxed{\phantom{000000}}) = 2k \cdot 4h(\boxed{\phantom{0000}}) = 8kh(h+1).$$

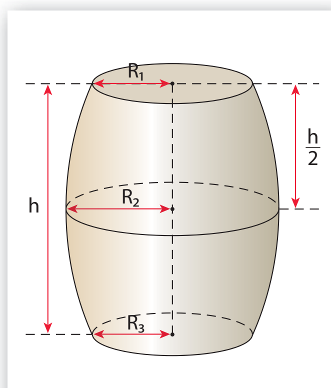
Il prodotto è quindi un ______ di 8 e il quoziente, ovvero $kh(h+1)$, è sicuramente ______ perché o $h$ è pari oppure lo è $h + 1$.

## 4 La botte di vino

Non è facile calcolare esattamente il volume di una botte. Probabilmente il primo che ci provò, volendo quantificare il vino presente nella sua cantina, fu l'astronomo tedesco Keplero (1571-1630). Una formula sufficientemente approssimata considera le superfici $S_1$, $S_2$ e $S_3$, dove $S_1$ e $S_3$ sono le superfici delle basi della botte e $S_2$ è quella del cerchio massimo. Il volume $V$ della botte è dato dalla relazione:

$$V = \frac{h(S_1 + 4S_2 + S_3)}{6}.$$

▶ Una botte costruita da un artigiano abruzzese ha le due basi identiche di diametro $D$, mentre il cerchio massimo ha diametro $D_2 = 1{,}25D$ e l'altezza è $h$. Calcola il volume $V$ della botte in funzione di $D$ e $h$ e determina la frazione $K$ per la quale si può scrivere $V = K\pi h D^2$.




▶ I raggi dei cerchi della botte sono:

$$r_1 = r_3 = \frac{D}{2}, \quad r_2 = \frac{D_2}{2} = \frac{1{,}25D}{2} = \frac{5}{4} \cdot \frac{D}{2}.$$

Determiniamo il volume della botte mediante la formula del testo:

$$V = \frac{1}{6}h\left[\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 + 4\pi\left(\boxed{\phantom{0000}}\right)^2 + \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{6}h\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot \left(\boxed{\phantom{0000000000}}\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{33}{4} h\pi \frac{D^2}{4} = \frac{33}{96} h\pi D^2.$$

La frazione $K$ richiesta è pertanto: $K = \boxed{\phantom{00}}$.