REALTÀ E MODELLI SCHEDA DI LAVORO

1 Le leghe metalliche

Il costo al kilogrammo di quattro metalli A, B, C, D è rispettivamente di 10, 15, 30 e 18 euro. Si vogliono ottenere 300 kg di una lega dei quattro metalli in cui la quantità di A sia doppia di B e che abbia un costo complessivo per il materiale di 16 euro al kilogrammo. Inoltre la lega deve contenere almeno una parte di ogni metallo, non si possono mettere meno di 10 kg del metallo D, mentre c'è una scorta di 100 kg del metallo B che deve essere esaurita per quanto possibile.

▶ Per ottenere 300 kg di lega, quanti kilogrammi occorrono di ciascun metallo?

▶ Chiamiamo rispettivamente a, b, c, d le quantità in kilogrammi dei quattro metalli necessari per ottenere i 300 kg di lega. Impostiamo il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} a = \ldots \\ a + \ldots = 300 \\ 10a + \ldots b + \ldots = \ldots \end{cases}$$

Le incognite devono inoltre soddisfare i vincoli:

$$a > 0,\ 0 < b \ldots,\ c > 0,\ d \ldots.$$

Il sistema è in quattro incognite e tre equazioni, quindi sicuramente non è determinato poiché il numero di equazioni è minore del numero di incognite. Studiamo se è indeterminato o impossibile.
La matrice incompleta associata al sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & \ldots & & \\ 10 & \ldots & & \end{bmatrix}$$

ha rango …, poiché ammette un minore di ordine tre non nullo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ldots & & 1 \\ \ldots & & 18 \end{vmatrix} = \ldots$$

La matrice completa non può avere rango superiore, perché ha …. Quindi $r_i = r_m = 3 < 4$; il sistema è … e le soluzioni dipendono da un parametro.
Troviamo le incognite in funzione di b.

$$\begin{cases} a = 2b \\ 2b + b + c + d = 300 \\ \ldots \end{cases} \to \begin{cases} a = 2b \\ c = 300 \ldots \\ \ldots \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} a = 2b \\ c = 300 \ldots \\ \ldots \end{cases} \to \begin{cases} a = 2b \\ c = 300 \ldots \\ d = \ldots = 350 - \ldots \end{cases} \to \begin{cases} a = 2b \\ c = \dfrac{19}{12}b - 50 \\ d = 350 - \ldots \end{cases}$$

Ora dobbiamo tenere conto … per determinare la soluzione migliore.

$$\begin{cases} a = 2b > 0 \\ 0 < b \ldots \\ c = \dfrac{19}{12}b - 50 > 0 \to b > \ldots \\ d = 350 - \ldots \ldots \ldots \to b \leq 74 \end{cases}$$

Poiché del metallo B è opportuno consumarne ____, la soluzione ottimale è data dal valore ____ accettabile per b, cioè $b =$ ____:

$a = 148$ kg,
$b = 74$ kg,
$c = 67$ kg,
$d = 11$ kg.

2 Il coordinato

Un coordinato tenda-copriletto è prodotto con due tipi di stoffe, ciascuna delle quali contiene due filati. Indichiamo con a e b il costo dei due filati, con x e y il costo al metro delle due stoffe e con z e t il costo finale della tenda e del copriletto. I due sistemi s_1 e s_2 forniscono le relazioni tra questi elementi di costo.

$$s_1: \begin{cases} x = 0,3a + 0,7b \\ y = 0,6a + 0,4b \end{cases} \qquad s_2: \begin{cases} z = 4,5x + 2,5y \\ t = 2x + 8,4y \end{cases}$$

▶ Dopo aver rappresentato i sistemi in forma matriciale, trova il sistema che esprime il costo della tenda e del copriletto in funzione del costo dei due filati.

▶ La forma matriciale dei sistemi è la seguente:

$$s_1: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \qquad s_2: \begin{bmatrix} z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix},$$

da cui si ricava il sistema, sempre in forma matriciale, che esprime il costo finale z e t in funzione di a e b:

$$\begin{bmatrix} z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Il sistema richiesto è:

$$\begin{cases} z = \quad \\ t = \quad \end{cases}$$

3 Lo sportello al pubblico

Un ufficio ha due sportelli aperti al pubblico. Anna, Michael e Hussein sono tre lavoratori che operano a turno agli sportelli. Il numero di giornate lavorative e il numero di clienti serviti è dato dalla seguente tabella.

Lavoratori presenti	Giornate lavorative	Clienti serviti
Anna e Michael	120	1800
Anna e Hussein	140	1820
Michael e Hussein	122	1952

▶ Supponendo che il tempo per servire ogni cliente sia sempre lo stesso, quanti clienti sono stati serviti da ognuno dei tre addetti?

▶ Per questa mansione i lavoratori sono pagati con € 10 a giornata, € 0,50 per ogni cliente servito e in più € 50 per chi ha servito complessivamente il maggior numero di clienti. Quanto guadagna ciascuno?

▶ Indichiamo con x, y, z il numero medio di clienti serviti giornalmente rispettivamente da Anna, Michael, e Hussein e impostiamo il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x + \quad = \dfrac{1800}{\quad} \\ x + \quad = \quad \\ \quad = \dfrac{1952}{122} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + \quad = \quad \\ x + \quad = \quad \\ \quad = \quad \end{cases}$$

Operando per riduzione si ha:

$$\begin{cases} x + \underline{\qquad} = \underline{\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad\qquad} & \leftarrow \text{II eq.} - \text{I eq.} \\ \underline{\qquad\quad} = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + \underline{\qquad} = \underline{\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad} & \leftarrow \text{III eq.} + \text{II eq.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 9 \\ z = 7 \end{cases}$$

Perciò in totale il numero di clienti serviti da ciascun addetto è:

Anna: $6 \cdot (\underline{\qquad\qquad}) = 1560$

Michael: $\underline{\quad} \cdot (120 + \underline{\qquad}) = \underline{\qquad}$

Hussein: $\underline{\quad} \cdot (\underline{\qquad\qquad}) = 1834$

▶ Calcoliamo il guadagno di ciascun addetto:

Anna: $10 \cdot (\underline{\qquad\qquad}) + 0,50 \cdot \underline{\qquad} = 3380$ €

Michael: $\underline{\quad} \cdot (120 + \underline{\qquad}) + \underline{\qquad} \cdot \underline{\qquad} + \underline{\qquad} = 3559$ €

Hussein: $10 \cdot (\underline{\qquad\qquad}) + \underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad}$ €

4 L'acquisto della prima casa

Per l'acquisto della prima casa una giovane coppia ha bisogno di aggiungere ai propri risparmi un mutuo di € 120 000, in parte destinato alle spese notarili e d'agenzia. L'importo del mutuo richiesto è di € 3000 inferiore al 49% del valore dell'immobile, le spese di agenzia sono pari al 3% del valore dell'immobile più il 2% delle spese notarili, e queste corrispondono al 73% delle spese di agenzia.

▶ Determina il valore dell'immobile, le spese di agenzia e quelle notarili.

▶ Indichiamo con:

x = valore totale dell'immobile;
y = spese di agenzia;
z = spese notarili.

Impostiamo il sistema:

$$\begin{cases} 0,49x - \underline{\qquad} = 120\,000 \\ y = \underline{\qquad} + \underline{\qquad} z \\ z = 0,73\underline{\quad} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0,49x = \underline{\qquad\quad} \\ \underline{\qquad} - y + \underline{\qquad} = 0 \\ 0,73\underline{\quad} - z = 0 \end{cases}$$

che scritto in forma matriciale diventa:

$$\begin{bmatrix} \underline{\qquad\qquad\qquad} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\qquad} \end{bmatrix}.$$

Risolviamolo con la regola di Cramer.

$$D = \begin{vmatrix} 0,49 & 0 & 0 \\ \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} \\ \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & -1 \end{vmatrix} = \underline{\qquad\quad}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \underline{\qquad} & 0 \\ \underline{\qquad} & 0,02 \\ \underline{\qquad} & -1 \end{vmatrix} = \underline{\qquad} \;\rightarrow\; x = \underline{\qquad} = \frac{\underline{\qquad}}{0,482846} \simeq 251020 \text{ euro};$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 0,49 & \underline{\qquad} \\ 0,03 & \underline{\qquad} \\ 0 & \underline{\qquad} \end{vmatrix} = \underline{\qquad} \;\rightarrow\; y = \underline{\qquad} = \frac{\underline{\qquad}}{0,482846} \simeq 7642 \text{ euro};$$

$$D_z = \begin{vmatrix} \underline{\qquad} \end{vmatrix} = \underline{\qquad} \;\rightarrow\; z = \underline{\qquad} = \frac{\underline{\qquad}}{0,482846} \simeq 5579 \text{ euro}.$$

5 **Il colore dei mattoni**

Il colore dominante dei mattoni dipende dalla natura delle sabbie che li compongono. Considieriamo dunque tre tipi di sabbia: bianca, rossa e nera. Un certo silicato è presente al 10% nella sabbia bianca, al 18% nella rossa e al 32% in quella nera. Vogliamo ottenere un tipo di mattone edilizio miscelando queste sabbie, in modo che la quantità di sabbia nera sia il doppio di quella rossa e che l'impasto contenga complessivamente il 25% di quel tipo di silicato. Sapendo che la quantità di sabbia bianca più quella nera non deve superare i 400 kg:

- quanti kilogrammi di ognuna delle tre sabbie occorrono per ottenere 500 kg di miscela?

- Indichiamo con x, y, z il numero di kilogrammi di sabbia bianca, rossa e nera necessari per la miscela. Otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} \underline{\qquad} + z = 500 \\ z = \underline{\qquad} \\ 0,10x + \underline{\qquad} = \underline{\qquad} \cdot 500 \end{cases}$$

a cui dobbiamo aggiungere il vincolo $\underline{\qquad} \leq 400$.
Il sistema diventa:

$$\begin{cases} x = 500 \underline{\qquad} \\ z = \underline{\qquad} \\ 0,10(\underline{\qquad}) + \underline{\qquad} = \underline{\qquad} \rightarrow \underline{\qquad} y = \underline{\qquad} \rightarrow y \simeq 144 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 68 \\ y = 144 \\ z = 288 \end{cases}$$

Dato che $x + z = \underline{\qquad} < 400$, la soluzione trovata è $\underline{\qquad}$.