REALTÀ E MODELLI SCHEDA DI LAVORO

1 Luci sul palco

La potenza elettrica P assorbita da ciascuna lampada utilizzata per illuminare un palcoscenico segue la seguente legge:

$$P(r) = \frac{V^2 R}{R^2 + 2Rr + r^2},$$

dove V indica la tensione (misurata in volt) e R la resistenza (misurata in ohm) di ciascuna lampada. r indica invece la resistenza interna al circuito. Abbiamo a disposizione lampade che funzionano a una tensione di 230 V e hanno una resistenza di 100 Ω.

- ▶ Studia l'andamento della potenza P di ciascuna lampada in funzione della resistenza interna r del circuito.
- ▶ Cosa succede se la resistenza interna al circuito diventa molto grande?
- ▶ La potenza P assume un valore massimo?

▶ Sostituiamo i valori di voltaggio e resistenza nella funzione della potenza:

$$P(r) = \frac{\underline{\qquad}}{\underline{\qquad} + \underline{\qquad}\, r + r^2}.$$

Il dominio naturale della funzione è $\mathbb{R} - \{\underline{\qquad}\}$, ma poiché r rappresenta una resistenza, deve essere r ____: consideriamo quindi il dominio ____.

Intersezioni con gli assi: se $r = 0$, $P(0) =$ ____.

Non ci sono asintoti ____ perché $100^2 + 200r + r^2 \neq$ ____ per ogni ____.
Poiché il denominatore ha grado ____ e il ____ ha grado 0, si ha:

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\underline{\qquad}}{\underline{\qquad} + \underline{\qquad}\, r + r^2} = \underline{\quad};$$

la funzione ha quindi l'asse delle ____ come asintoto ____.
Calcoliamo la derivata prima e studiamone il segno.

$$P(r) = \frac{230^2 \cdot 100}{100^2 + 200r + r^2} = 230^2 \cdot 100 \cdot (100 + r)^{-2},$$

$$P'(r) = \underline{\qquad\qquad} \cdot (100 + r)^{-3},$$

$P'(r) < 0$ per $r \geq 0$ (ci limitiamo al dominio considerato).

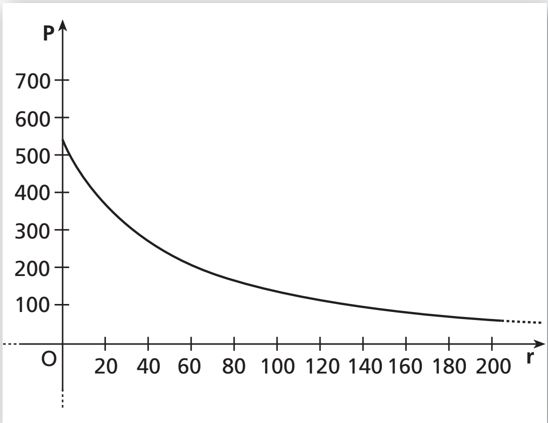
Dallo studio del segno della derivata prima si deduce che la funzione è sempre ____ per ____.
Calcoliamo la derivata seconda e studiamone il segno:

$$P''(r) = \underline{\qquad\qquad} \cdot (100 + r)^{-4},$$

$P''(r)$ ____ per $r \geq 0$.

Dallo studio del segno della derivata seconda si deduce che la funzione ha ____ rivolta sempre verso ____ per $r \geq 0$.

La funzione $P(r)$ ha quindi l'andamento disegnato in figura.



◀ **Figura 1**

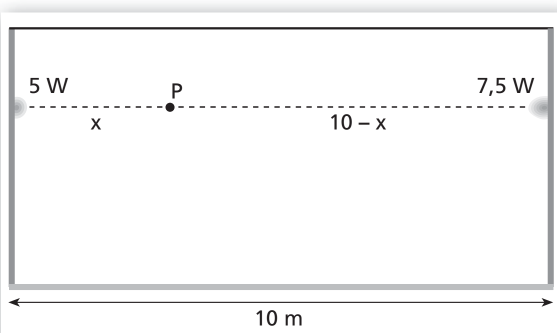
- Come si può vedere dal grafico e dall'espressione analitica della funzione, la ____ diminuisce tendendo asintoticamente a ____.
- La potenza assume il valore massimo $P =$ ____ per $r =$ ____.

2 L'intensità luminosa

La «legge del quadrato della distanza» o *inverse square law* (ISL) afferma che l'intensità dell'illuminazione prodotta su una superficie (irradiamento) da una sorgente puntiforme è direttamente proporzionale alla potenza luminosa (flusso raggiante) p emessa dalla sorgente e inversamente proporzionale al quadrato della distanza x dalla sorgente stessa, secondo l'espressione $I(x) = \dfrac{p}{4\pi x^2}$.

- Calcola qual è l'intensità luminosa prodotta da due lampadine (di potenza luminosa 5 W e 7,5 W, collocate su pareti opposte di una stanza larga 10 m), in un punto posto sulla loro congiungente, e studia la funzione ottenuta.
- Descrivi cosa succede avvicinandosi a una fonte luminosa o all'altra.
- Qual è il punto, sulla congiungente, con la minima intensità luminosa?
- Qual è l'andamento grafico dell'intensità luminosa così determinata?

- La posizione delle due lampadine è rappresentata in figura.



◀ **Figura 2**

Le due lampadine l_1 ed l_2 hanno potenza $p_1 = 5$ W e $p_2 = 7{,}5$ W e distano ____ m l'una dall'altra. L'intensità luminosa in un punto P che dista x da l_1 e (____) da l_2 è data da:

$$I(x) = \frac{5}{\text{____}} + \frac{\text{____}}{4\pi\,\text{____}}.$$

Il dominio, dovuto alle limitazioni fisiche della stanza, è ____ $< x <$ ____.

Segno della funzione: $I(x) > 0$ per ogni x del dominio.
Intersezioni con gli assi: ____.
Asintoti verticali $x = 0$ e $x = 10$, in quanto:

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\square \right) = \square, \qquad \lim_{x \to 10^-} \left(\square \right) = \square.$$

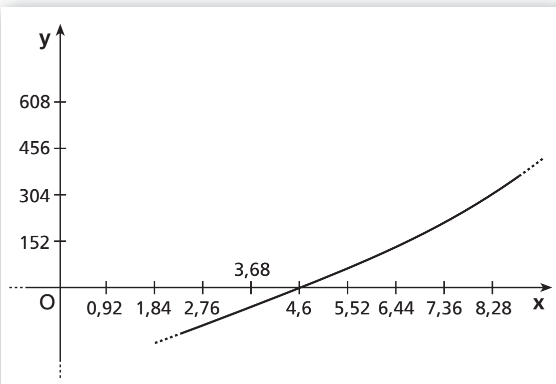
- Avvicinandosi a una delle due fonti luminose, l'intensità diventa ____.
- Calcoliamo la derivata prima e studiamone il segno:

$$I'(x) = \square + \frac{7,5}{\square};$$

$I'(x) = 0$ per $x = \alpha$, con $\alpha \simeq 4,66$, infatti, sviluppando l'espressione si ottiene

$$\frac{\square}{2\pi x^3 (10 - x)^3} = \frac{12,5(\square - 400)}{2\pi x^3 (10 - x)^3},$$

pertanto $I'(x) = 0$ se $\square - 400 = 0$.
L'equazione ammette una sola soluzione approssimata nell'intervallo $\square < x < \square$; per trovarla si può procedere anche per via grafica individuando l'intersezione fra ____ e la funzione $f(x) = \square - 400$ nell'intervallo $\square < x < \square$. Il grafico di $f(x)$ è il seguente:

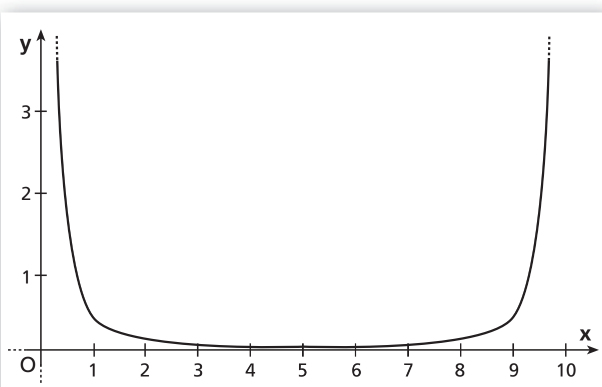


◀ **Figura 3**

La funzione $f(x)$ è continua (polinomio) e strettamente ____ nell'intervallo, infatti la sua derivata prima $f'(x) = \square > 0$ per ogni x, e $f(4)\ \square\ 0$ e $f(5)\ \square\ 0$. Per il ____ esiste una radice x, $\square < x < \square$. Iterando il procedimento si trova la soluzione approssimata $x \simeq 4,66$.

Il segno della derivata $I'(x)$ si trova osservando che il numeratore è ____ per $x > \square$ e negativo per $\square < x < \square$, mentre il denominatore è ____ nell'intervallo $]0; 10[$, quindi si conclude che la funzione $I(x)$ è ____ per $0 < x < 4,66$ e ____ per $\square < x < \square$. Il punto posto alla distanza di circa 4,66 m dalla lampadina ____ è il punto con il valore ____ di intensità luminosa.

- Il grafico dell'intensità $I(x)$ è quindi il seguente.



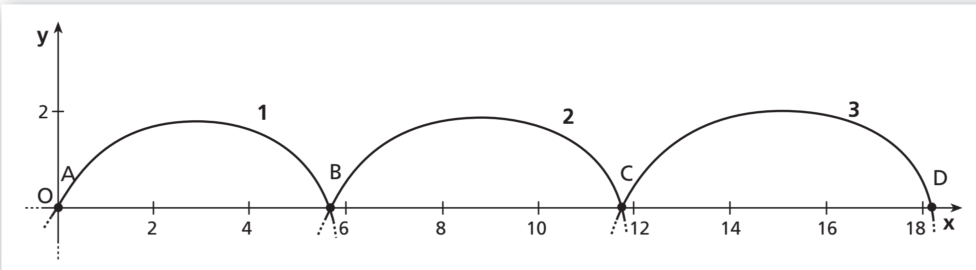
◀ **Figura 4**

3 **Salto triplo**

Nel salto triplo l'atleta, dopo una rincorsa, raggiunge la zona di battuta, da dove effettua tre balzi consecutivi. Il record del mondo appartiene al britannico Jonathan Edwards ed è di 18,29 m. Esaminando il salto, si osserva che nel primo balzo (hop) la velocità di stacco (tangente) ha un'inclinazione di 15° rispetto alla pedana, nel secondo (step) di 13° e nell'ultimo (jump) di 17°. Le misure parziali dei tre balzi sono rispettivamente di 5,7 m, 5,9 m, 6,69 m.

▶ Fissato il sistema di riferimento nel punto di stacco del primo balzo, determina le funzioni delle traiettorie nei tre salti parziali (approssima i calcoli) e studia l'andamento degli stessi.

▶ Schematicamente i tre salti si presentano così:



◀ Figura 5

Per ciascuna delle tre traiettorie bisogna determinare l'equazione della parabola $y =$ … avendo a disposizione 3 condizioni: passaggio per … e coefficiente angolare della … in uno di essi (che è individuato dalla … $y' =$ … della funzione in quel punto).

Per la prima traiettoria si ha $A(0;0)$, $B(\ldots;0)$, $y'(x_A) = \ldots$, quindi:

$$\begin{cases} c = 0 \\ 32{,}49a + \ldots = 0 \\ b = \ldots \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \ldots \\ b = \ldots \\ c = 0 \end{cases} \rightarrow y_1 = \ldots x^2 + \ldots x$$

Per la seconda traiettoria si ha $B(5{,}7;0)$, $C(\ldots)$, $y'(x_B) = \ldots$, quindi:

$$\begin{cases} \ldots + c = 0 \\ 134{,}56a + \ldots = 0 \\ \ldots + b = \ldots \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \ldots \\ b = \ldots \\ c = -2{,}63 \end{cases} \rightarrow y_2 = \ldots x^2 + \ldots x - 2{,}63.$$

Per la terza traiettoria si ha $C(11{,}6;0)$, $D(\ldots;0)$, $y'(x_C) = \ldots$, quindi:

$$\begin{cases} 134{,}56a + 11{,}6b + c = 0 \\ 334{,}5241a + 18{,}29b + c = 0 \\ 23{,}2a + b = 0{,}31 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \ldots \\ b = \ldots \\ c = \ldots \end{cases} \rightarrow y_3 = \ldots.$$

Per quanto riguarda gli intervalli di crescenza e decrescenza occorre studiare il segno della … nei tre balzi. Considerando anche gli intervalli in cui sono definite le tre funzioni, si ottiene:

$y_1' = \ldots > 0 \rightarrow 0 < x < \ldots$, funzione crescente;

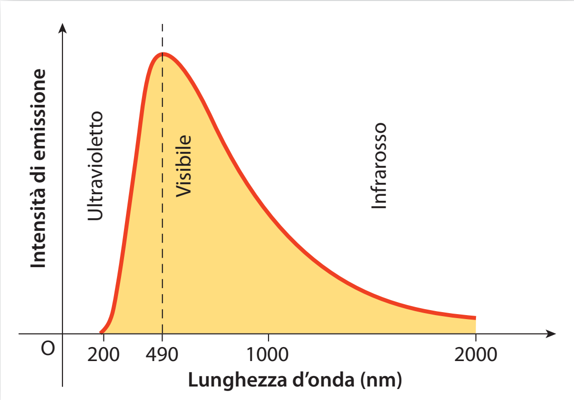
$y_2' = -0{,}08x + 0{,}69 > 0 \rightarrow \ldots < x < 8{,}625$, funzione …;

$y_3' = \ldots > 0 \rightarrow \ldots < x < \ldots$, funzione crescente.

4 Lo spettro solare

Il grafico rappresenta in modo approssimato lo spettro della luce solare che raggiunge la superficie terrestre. In ascissa è riportata la lunghezza d'onda, espressa in nanometri (10^{-9} m), e la curva rappresentata (densità spettrale) indica com'è distribuita, al variare della lunghezza d'onda, l'intensità della radiazione. L'area evidenziata in giallo corrisponde all'intensità complessiva.

▶ Chiamata $f(x)$ la funzione rappresentata nel grafico a fianco, disegna in modo approssimato il grafico della funzione derivata.

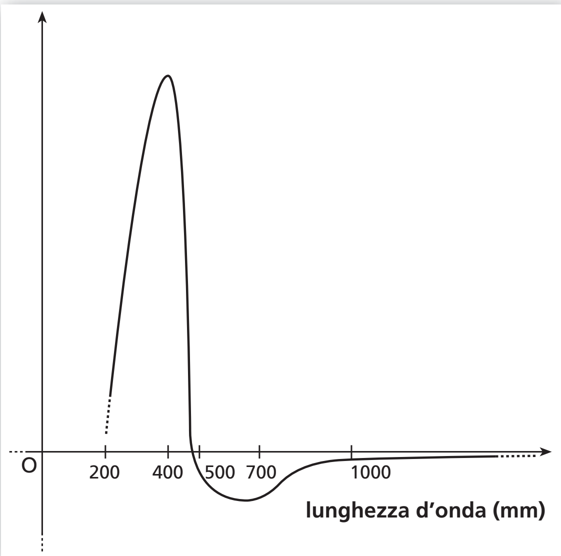


▶ Sulla base del grafico della funzione *f*, si possono formulare le seguenti considerazioni relative al grafico della funzione derivata:

- per $200 < x < 490$ la funzione derivata è ____ in quanto la funzione è ____;
- per $490 < x < 2000$ la funzione derivata è ____ in quanto la funzione è ____;
- in $x = 490$ c'è uno ____ della funzione ____ in quanto ____ presenta un punto di massimo;
- per $200 < x < 400$ (circa) e con $x > 700$ (circa), la ____ è crescente in quanto il grafico della funzione è ____ e quindi la derivata seconda è ____;
- per $400 < x < 700$ (circa) la funzione derivata è ____ in quanto il grafico presenta ____ verso il ____ e quindi la derivata ____ è negativa;
- in $x = 400$ (circa) la funzione derivata presenta un ____, in $x = 700$ (circa) presenta un ____;
- l'ordinata del punto di massimo relativo della funzione derivata deve essere molto elevata, infatti dal grafico si nota che la ____ nel punto di ascissa 400 è quasi ____;
- l'ordinata del punto di minimo relativo della funzione derivata sarà circa $-1,7$ poiché dal grafico si nota che la ____ nel punto di ascissa 700 forma un angolo di circa ____ con l'asse *x*, quindi ____ in quel punto è uguale a ____;
- analizzando ancora l'andamento qualitativo delle tangenti al grafico, si possono ipotizzare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to \_\_\_\_} f'(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \simeq 1,7, \qquad \lim_{x \to \_\_\_\_} f'(x) = 0.$$

Il grafico della funzione derivata è approssimativamente il seguente.



◀ Figura 6