REALTÀ E MODELLI SCHEDA DI LAVORO

1 La rendita finanziaria

Un risparmiatore, alla fine di ogni anno, versa una rata R di € 6000 a una banca che la capitalizza a un tasso d'interesse annuo i del 3,5%. Il montante M_n maturato alla fine dell'anno n, cioè l'ammontare che il risparmiatore potrebbe prelevare alla fine dell'anno n, è dato da:

$$M_n = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

(l'anno 1 è l'anno in cui si effettua il primo versamento).

- ▶ Determina l'espressione ricorsiva del montante M_n.
- ▶ Alla fine del 5° anno quanto hanno fruttato in tutto le rate versate dal commerciante?
- ▶ A quanto tende il montante se il numero di anni dei versamenti aumenta sempre di più?

▶ Alla fine del primo anno il montante coincide con il valore dell'unica rata appena versata:

$$M_1 = R.$$

Alla fine dell'anno n, il montante è dato dal montante dell'anno precedente ____ più l'interesse maturato in un anno su M_{n-1} più il valore della ____ versata nell'anno ____:

$$M_n = \underline{\quad\quad} + i \cdot \underline{\quad\quad} + R \;\rightarrow\; M_n = (\underline{\quad\quad}) \cdot M_{n-1} + \underline{\quad}.$$

▶ Applichiamo la formula del montante e ____ il valore delle ____ rate versate:

$$M_5 \underline{\quad} 5R = 6000\frac{\underline{\quad\quad\quad\quad} - 1}{\underline{\quad\quad}} - \underline{\quad} \cdot \underline{\quad\quad} \simeq 2174,80 \text{ €}.$$

▶ Consideriamo la successione $M_n = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$; bisogna calcolarne il ____ per n tendente ____.

Si può notare che, dato che $i > 0$, è $1 + i >$ ____ e $\lim_{n \to +\infty} (1+i)^n =$ ____.

Quindi $\lim_{n \to +\infty} R\frac{\underline{\quad\quad\quad\quad}}{i} =$ ____.

2 Il sistema di irrigazione

Qualche anno fa è stato brevettato un nuovo sistema di irrigazione programmabile che «riconosce» la quantità di acqua da erogare in relazione alle condizioni atmosferiche. Appena è stato messo in commercio, costava circa € 400. Dopo il primo anno, il suo valore commerciale si è abbassato di € 40 e così è stato per gli anni successivi fino all'estate 2011, quando è stato venduto al prezzo di € 280.

- ▶ In quale anno è stato posto in commercio?
- ▶ Nell'ipotesi che il prezzo scenda in modo costante, a quanto sarà possibile acquistarlo l'estate successiva? E dopo due anni?

▶ I dati a disposizione rivelano che la successione è una progressione ____ di ragione $d = 40$ e di valore iniziale $a_0 = 400$. Il termine generale della successione è:

$$a_n = \text{____}.$$

Determiniamo il valore di n corrispondente all'estate 2011:

$$a_n = \text{____} = 280 \quad \to \quad \text{____} = \text{____} \quad \to \quad n = 3.$$

L'impianto è stato messo in commercio 3 anni prima dell'estate 2011, cioè nell'anno 2008.

▶ Il costo dell'impianto negli anni 2012 e 2013 è:

$$a_4 = (\text{____})\,€ = 240\,€ \qquad \text{(costo nell'estate 2012);}$$
$$a_5 = (\text{____})\,€ = 200\,€ \qquad \text{(costo nell'estate 2013).}$$

Potevamo ottenere gli stessi valori con il seguente calcolo:

$$a_4 = (a_3 - 40)\,€ = (\text{____})\,€ = 240\,€;$$
$$a_5 = (a_4 - 40)\,€ = (\text{____})\,€ = 200\,€.$$

3 **La previsione demografica**

Secondo i dati Istat, la popolazione in Italia al 1° gennaio 2011 era costituita da (circa) 56 038 000 cittadini italiani e 4 563 000 stranieri regolarmente residenti. Negli ultimi anni il numero di cittadini italiani è diminuito in media dello 0,07% ogni anno, mentre gli immigrati sono aumentati in media di circa 400 000 unità all'anno.

▶ Con i dati a disposizione costruisci il modello che consente di prevedere la popolazione residente al 1° gennaio dal 2012 al 2015.

▶ Indichiamo con i_n la successione che fornisce il numero di cittadini italiani nel corso degli anni (l'indice $n = 1$ corrisponde all'anno 2011):

$i_1 = 56\,038\,000;$
$i_2 = \qquad \simeq 55\,998\,773$ (stima cittadini italiani al 1° gennaio 2012);
$i_3 = \qquad \simeq 55\,959\,574$ (stima cittadini italiani al 1° gennaio 2013);
$i_4 = \qquad \simeq 55\,920\,403$ (stima cittadini italiani al 1° gennaio 2014);
$i_5 = \qquad \simeq 55\,881\,258$ (stima cittadini italiani al 1° gennaio 2015).

In generale è:

$$i_n = i_{n-1} \cdot (1 - 0{,}0007) = i_1 \cdot (1 - 0{,}0007)^{n-1}.$$

Indichiamo ora con s_n la successione che fornisce il numero di stranieri residenti nel corso degli anni:

$s_1 = 4\,563\,000;$
$s_2 = \qquad = 4\,963\,000$ (stima stranieri residenti al 1° gennaio 2012);
$s_3 = \qquad = 5\,363\,000$ (stima stranieri residenti al 1° gennaio 2013);
$s_4 = \qquad = 5\,763\,000$ (stima stranieri residenti al 1° gennaio 2014);
$s_5 = \qquad = 6\,163\,000$ (stima stranieri residenti al 1° gennaio 2015).

In generale è:

$$s_n = s_{n-1} + 400\,000 = s_0 + \qquad .$$

Il valore p_n della popolazione residente è dato dalla somma delle due successioni:

$p_1 = i_1 + s_1 = 56\,038\,000 + 4\,563\,000 = 60\,601\,000$ (popolazione al 1° gennaio);
$p_2 = i_2 + s_2 = 55\,998\,773 + 4\,963\,000 = 60\,961\,773$ (stima popolazione al 1° gennaio);
$p_3 = i_3 + s_3 = 55\,959\,574 + 5\,363\,000 = 61\,322\,574$ (stima popolazione al 1° gennaio);
$p_4 = i_4 + s_4 = 55\,920\,403 + 5\,763\,000 = 61\,683\,403$ (stima popolazione al 1° gennaio);
$p_5 = i_5 + s_5 = 55\,881\,258 + 6\,163\,000 = 62\,044\,258$ (stima popolazione al 1° gennaio).

Volendo fare una previsione per gli anni successivi, si può applicare la formula generale:

$$p_n = i_n + s_n = \qquad .$$

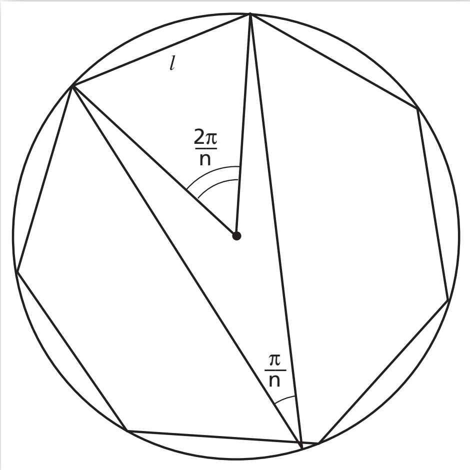
4 Poligoni inscritti e circoscritti

Data una circonferenza C di raggio r, per ogni numero naturale n si possono costruire i poligoni regolari P e Q di n lati, rispettivamente inscritto e circoscritto alla circonferenza. La lunghezza della circonferenza è ovviamente compresa tra i perimetri dei due poligoni.

- Esprimi in funzione di r e n il perimetro dei poligoni, e calcola il limite delle successioni ottenute, con n che tende all'infinito.

- Consideriamo il poligono P inscritto: l'angolo al centro che insiste su ogni lato l è di ampiezza ……, perciò l'angolo alla circonferenza è ……. Per il teorema ……:

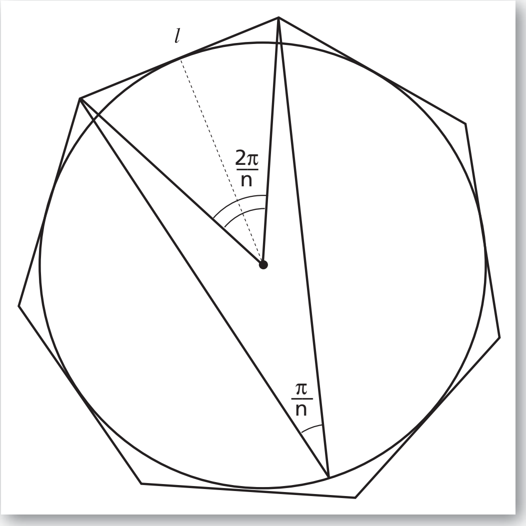
$$l = 2r \cdot \ldots\ldots, \quad perimetro_P = \ldots\ldots .$$



◀ **Figura 1**

Consideriamo ora il poligono Q circoscritto: l'angolo al centro che insiste su ogni lato l è sempre di ampiezza ……; in questo caso il raggio della circonferenza è anche …… del triangolo …… e, per il teorema ……:

$$l = 2r \cdot \ldots\ldots, \quad perimetro_Q = \ldots\ldots .$$



◀ **Figura 2**

Calcoliamo i limiti delle successioni ricordando il limite notevole: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\boxed{}} = \boxed{}$.

$$\lim_{n \to +\infty} 2rn \cdot \boxed{} = \lim_{n \to +\infty} 2r \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}{\boxed{}} = \lim_{n \to +\infty} 2r\pi \boxed{} = 2\pi r,$$

$$\lim_{n \to +\infty} 2rn \cdot \boxed{} = \lim_{n \to +\infty} 2r \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}{\boxed{} \cdot \frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2r\pi}{\boxed{}} \cdot \boxed{} = 2\pi r.$$

Ovviamente entrambi i limiti tendono alla lunghezza della circonferenza.