REALTÀ E MODELLI SCHEDA DI LAVORO

1 La rendita finanziaria

Un risparmiatore, alla fine di ogni anno, versa una rata R di € 6000 a una banca che la capitalizza a un tasso d'interesse annuo i del 3,5%. Il montante M_n maturato alla fine dell'anno n, cioè l'ammontare che il risparmiatore potrebbe prelevare alla fine dell'anno n, è dato da:

$$M_n = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

(l'anno 1 è l'anno in cui si effettua il primo versamento).

- Determina l'espressione ricorsiva del montante M_n.
- Alla fine del 5° anno quanto hanno fruttato in tutto le rate versate dal commerciante?
- A quanto tende il montante se il numero di anni dei versamenti aumenta sempre di più?

- Alla fine del primo anno il montante coincide con il valore dell'unica rata appena versata:

$$M_1 = R.$$

Alla fine dell'anno n, il montante è dato dal montante dell'anno precedente ____ più l'interesse maturato in un anno su M_{n-1} più il valore della ____ versata nell'anno ____:

$$M_n = \square + i \cdot \square + R \;\rightarrow\; M_n = (\square) \cdot M_{n-1} + \square .$$

- Applichiamo la formula del montante e ____ il valore delle ____ rate versate:

$$M_5 \;\square\; 5R = 6000\frac{\square - 1}{\square} - \square \cdot \square \simeq 2174,80 \text{ €}.$$

- Consideriamo la successione $M_n = R\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$; bisogna calcolarne il ____ per n tendente ____.

Si può notare che, dato che $i > 0$, è $1 + i > \square$ e $\lim\limits_{n \to +\infty} (1+i)^n = \square$.

Quindi $\lim\limits_{n \to +\infty} R\dfrac{\square}{i} = \square$.

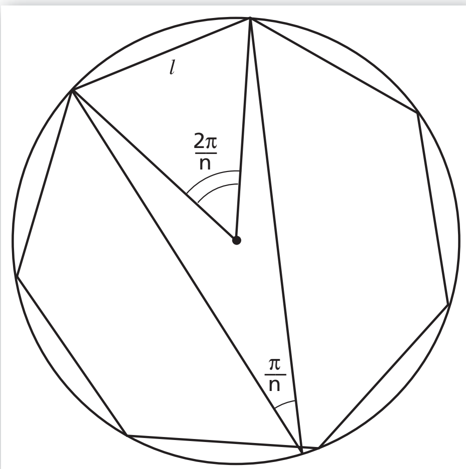
2 **Poligoni inscritti e circoscritti**

Data una circonferenza C di raggio r, per ogni numero naturale n si possono costruire i poligoni regolari P e Q di n lati, rispettivamente inscritto e circoscritto alla circonferenza. La lunghezza della circonferenza è ovviamente compresa tra i perimetri dei due poligoni.

- Esprimi in funzione di r e n il perimetro dei poligoni, e calcola il limite delle successioni ottenute, con n che tende all'infinito.

- Consideriamo il poligono P inscritto: l'angolo al centro che insiste su ogni lato l è di ampiezza ____, perciò l'angolo alla circonferenza è ____. Per il teorema ____:

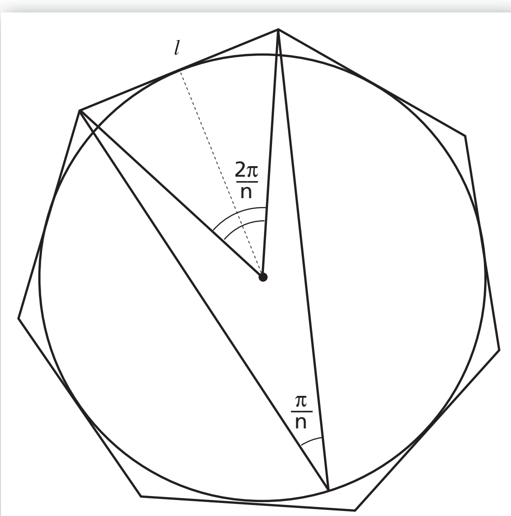
$$l = 2r \cdot \_\_\_\_, \quad perimetro_P = \_\_\_\_.$$



◄ **Figura 1**

Consideriamo ora il poligono Q circoscritto: l'angolo al centro che insiste su ogni lato l è sempre di ampiezza ____; in questo caso il raggio della circonferenza è anche ____ del triangolo ____ e, per il teorema ____ ____:

$$l = 2r \cdot \_\_\_\_, \quad perimetro_Q = \_\_\_\_.$$



◄ **Figura 2**

Calcoliamo i limiti delle successioni ricordando il limite notevole: $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\boxed{}} = \boxed{}$.

$$\lim_{n \to +\infty} 2rn \cdot \boxed{} = \lim_{n \to +\infty} 2r \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}{\boxed{}} = \lim_{n \to +\infty} 2r\pi \boxed{} = 2\pi r,$$

$$\lim_{n \to +\infty} 2rn \cdot \boxed{} = \lim_{n \to +\infty} 2r \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}{\boxed{} \cdot \frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2r\pi}{\boxed{}} \cdot \boxed{} = 2\pi r.$$

Ovviamente entrambi i limiti tendono alla lunghezza della circonferenza.

3 Le soluzioni

La concentrazione di una sostanza A in una soluzione S può essere espressa dal rapporto tra il volume di soluto A contenuto in una determinata quantità di soluzione S e il volume della soluzione stessa.
Per esempio, se 10 ml della sostanza A sono mescolati con 90 ml di un solvente, la concentrazione di A nella soluzione ottenuta S_1 è 10 ml / (10 + 90) ml = 1/10 della concentrazione iniziale di A.

- ▶ Se si mescolano 10 ml della soluzione S_1 precedentemente ottenuta con altri 90 ml di solvente, qual è la concentrazione di sostanza A nel campione di soluzione ottenuto S_2?
- ▶ Come si può modellizzare la concentrazione di sostanza A nel campione se vengono fatte in sequenza *n* diluizioni mantenendo costanti le proporzioni e prendendo ogni volta come campione da diluire la miscela ottenuta nell'operazione precedente?
- ▶ Qual è la concentrazione di A nel campione dopo 7 operazioni di diluizione successive?

▶ Misceliamo 10 ml di S_1 con 90 ml di solvente, ottenendo 100 ml di una soluzione S_2. In S_2 sono contenuti:

$$10 \text{ ml} \cdot \boxed{} = 1 \text{ ml di sostanza A},$$

poiché la concentrazione di A nei 10 ml di S_1 è pari a $\boxed{}$.

Pertanto la concentrazione di A in S_2 è:

$$c_2 = \frac{\boxed{} \text{ ml}}{\boxed{} \text{ ml}} = \frac{1}{\boxed{}} = \left(\boxed{}\right)^2.$$

▶ Iterando il procedimento per *n* volte si ottiene che la diluizione di A al passo *n* in relazione alla concentrazione iniziale è:

$$c_n = \boxed{}.$$

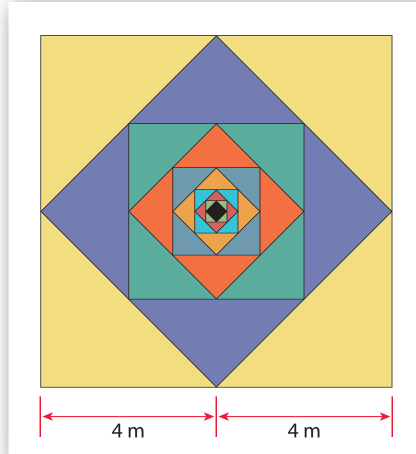
▶ La ____________ di A nel campione dopo 7 operazioni di diluizione ________ si trova applicando la formula trovata al punto precedente:

$$\boxed{} = \frac{1}{\boxed{}}.$$

4 Il tappeto geometrico

Un designer organizza un'area quadrata di lato 8 m destinata a bambini piccoli all'interno di un giardino pubblico. L'area è suddivisa in quadrati concentrici, ognuno dei quali è individuato dai punti medi dei lati del quadrato a esso esterno.

- Ipotizziamo che la successione dei quadrati prosegua all'infinito (anche se nella realtà ciò ovviamente è impossibile). Qual è il termine generale della successione l_n che esprime la lunghezza del lato dei quadrati?
- Trova, in funzione di n, la somma dei primi n termini della successione l_n.



- Il quadrato più grande (che indichiamo con Q_1) ha il lato di lunghezza $l_1 = 8$ m.

Il lato del quadrato successivo Q_2 è ______ di un triangolo ______ di lato ___, quindi la sua lunghezza è:

$$l_2 = \ldots = l_1 \cdot \ldots = 8 \cdot \ldots .$$

Analogamente, il lato del quadrato successivo ___ è ______ di un triangolo rettangolo isoscele di lato ___, quindi la sua lunghezza è:

$$l_3 = \ldots = \ldots = l_1 \cdot \ldots = 8 \cdot \ldots .$$

In generale, il lato del quadrato Q_n ha lunghezza:

$$l_n = 8 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}.$$

Infatti (dimostriamolo per induzione):

$$l_1 = 8 \cdot \ldots = 8,$$

$$\text{se } l_n = 8 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}, \text{ allora } l_{n+1} = \frac{l_n}{2} \cdot \ldots = l_n \cdot \ldots = 8 \cdot \ldots \cdot \ldots = 8 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n}.$$

- La successione ottenuta l_n è una progressione ______ di ______ $q =$ ___ e primo termine $l_1 =$ ___. La somma dei ______ si ottiene applicando la formula S_n:

$$S_n = l_1 \cdot \ldots \quad \rightarrow \quad S_n = 8 \cdot \frac{\ldots}{\ldots}.$$