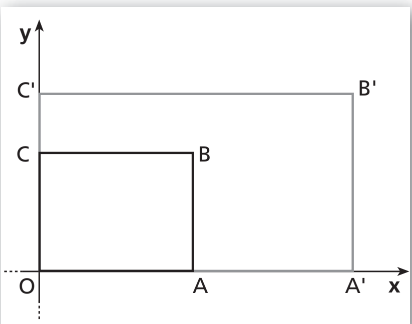
REALTÀ E MODELLI SCHEDA DI LAVORO

1 Il televisore

La forma rettangolare di uno schermo televisivo è differente a seconda del rapporto tra la larghezza e l'altezza. I televisori di vecchio tipo, a tubo catodico, hanno un rapporto 4 : 3, mentre generalmente quelli moderni hanno un rapporto 16 : 9.

- Considera uno schermo 4 : 3 di altezza h e uno schermo 16 : 9 di altezza h'. Posizionata l'origine del sistema di riferimento cartesiano nell'angolo in basso a sinistra dello schermo, scrivi l'equazione della trasformazione che porta l'immagine dal primo schermo al secondo. Di che tipo di trasformazione si tratta?
- Daniela non vuole buttare il suo vecchio televisore funzionante: come vedrà l'immagine se la trasmissione è predisposta per uno schermo di nuovo tipo?

- Schematizziamo la situazione con una figura.



◀ Figura 1

I due rettangoli rappresentano i due schermi televisivi.
Il rettangolo $OABC$ individua lo schermo di tipo 4:3. I suoi lati sono pertanto in rapporto:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \boxed{}.$$

Il rettangolo $OA'B'C'$ individua lo schermo di tipo 16:9. I suoi lati sono pertanto in rapporto:

$$\frac{\overline{OA'}}{\boxed{}} = \boxed{}.$$

Inoltre:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \boxed{}.$$

Per trovare l'equazione dell'affinità che trasforma il rettangolo $OABC$ nel rettangolo $OA'B'C'$ osserviamo che:

$$\overline{OA'} = \frac{16}{9} \cdot \boxed{} = \frac{16}{9} \cdot \boxed{} = \frac{16}{9} \cdot \boxed{} \rightarrow x' = \boxed{} \cdot x.$$

$$\overline{A'B'} = \frac{h'}{h} \cdot \overline{AB} \rightarrow \boxed{} = \boxed{} \cdot y.$$

L'equazione dell'affinità è quindi:

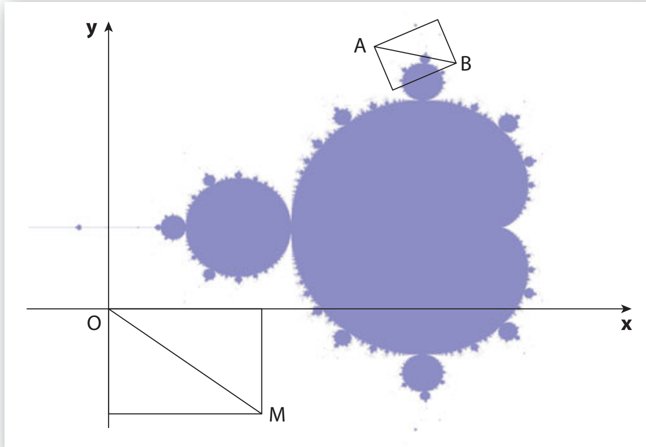
$$\begin{cases} x' = \boxed{} \\ y' = \dfrac{h'}{h} \cdot y \end{cases}$$

Si tratta di una dilatazione.

- L'immagine è predisposta per uno schermo 16:9. Se sul televisore 4:3 l'immagine occupa l'intero schermo, allora risulterà «allungata» in ______, ovvero subisce una ______ orizzontale. Se invece l'immagine viene rimpicciolita in modo da essere tutta contenuta nello schermo mantenendo le proporzioni originali, allora appariranno due bande nere ______ e ______ l'immagine.

2 Come si elaborano le immagini?

- Determina la trasformazione che riproduce nel rettangolo del quarto quadrante individuato da $M(4; -3)$ la porzione del frattale di Mandelbrot individuata dal rettangolo simile di vertici $A(10; 10)$ e $B(12; 9{,}5)$.



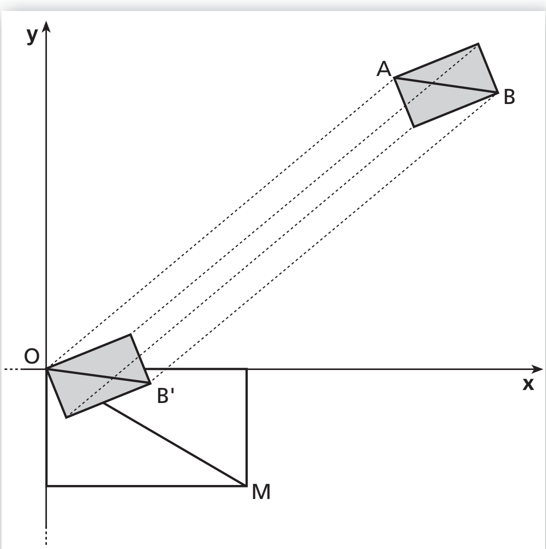
- Nei rettangoli indicati sono messe in evidenza le diagonali OM e AB perché saranno le trasformazioni della diagonale a determinare quelle di tutta la figura.
  Applichiamo alla figura una ______ in modo che il punto A si trasformi nel punto O. La stessa ______ è applicata a tutti i punti dell'immagine.
  Poiché $A(10; 10)$ e $O(0; 0)$, la ______ considerata è:

$$t: \begin{cases} x' = \text{\_\_\_\_\_\_} \\ y' = \text{\_\_\_\_\_\_} \end{cases}$$

I trasformati dei vertici della diagonale sono:

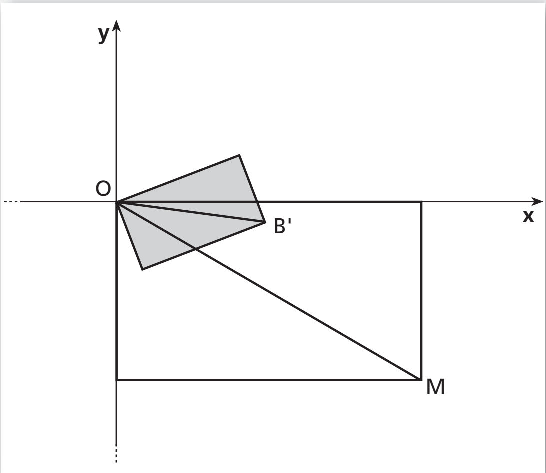
$$A(10; 10) \mapsto A' \equiv O(0; 0),$$

$$B(12; 9{,}5) \mapsto B'(\text{\_\_\_\_\_\_}).$$

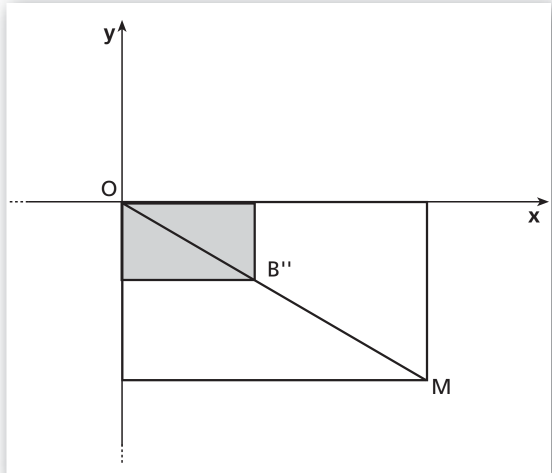


◄ **Figura 2**

Determiniamo ora la rotazione di centro O che porta la diagonale OB', appartenente alla retta di equazione $y = \underline{\qquad} x$ $(x \geq 0)$, sulla diagonale OM del rettangolo d'arrivo, individuata dall'equazione $y = \underline{\qquad} x$ $(x \geq 0)$.



▲ **Figura 3**



▲ **Figura 4**

Una rotazione mantiene le distanze, quindi il punto B' deve portarsi in B'' tale che $\overline{OB'} = \underline{\qquad}$.

$$\overline{OB'} = \sqrt{\underline{\quad} + \underline{\qquad}} = \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

Il punto $B''\left(x; -\frac{3}{4}x\right)$ della figura 4 ha coordinate tali che:

$$\overline{OB''} = \sqrt{\underline{\qquad\qquad}} = \frac{\sqrt{17}}{2} \rightarrow x = \underline{\qquad} \rightarrow B''\left(\underline{\qquad}; \underline{\qquad}\right).$$

Le equazioni di una rotazione di centro O sono $\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\underline{\qquad} \\ y' = x\,\mathrm{sen}\,\alpha\underline{\qquad} \end{cases}$;

in queste sostituiamo $(x; y) = \left(2; -\frac{1}{2}\right)$ e $(x'; y') = \left(\frac{2\sqrt{17}}{5}; -\frac{3\sqrt{17}}{10}\right)$:

$$\begin{cases} \frac{2\sqrt{17}}{5} = \underline{\quad}\cos\alpha + \underline{\quad}\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ -\frac{3\sqrt{17}}{10} = \underline{\quad}\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\underline{\quad}\,\frac{1}{2}\cos\alpha \end{cases}$$

da cui:

$$\cos\alpha = \underline{\qquad} \text{ e } \mathrm{sen}\,\alpha = \underline{\qquad} \rightarrow \alpha \simeq -23°.$$

Posto $a = \cos\alpha$ e $b = \mathrm{sen}\,\alpha$, ormai noti, rimane individuata la rotazione:

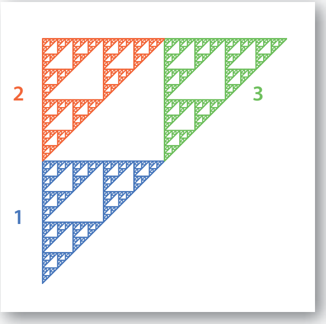
$$r: \begin{cases} x' = \underline{\qquad} \\ y' = \underline{\qquad} \end{cases}$$

La trasformazione geometrica si conclude con $\underline{\qquad\qquad}$ di centro O di equazioni $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$ che manda il punto $B''\left(\frac{2\sqrt{17}}{5}; \frac{3\sqrt{17}}{10}\right)$ nel punto $\underline{\qquad\qquad}$:

$$\omega: \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases} \rightarrow k = \frac{10\sqrt{17}}{17}$$

La trasformazione geometrica cercata è data dalla composizione $\omega \circ r \circ t$ delle tre trasformazioni sopra determinate. La porzione iniziale del frattale viene trasformata nel rettangolo di diagonale OM.

3 I frattali



Uno dei frattali più noti è il triangolo di Sierpinski, che si ottiene in questo modo: da un quadrato di lato unitario si elimina il quadratino in basso a destra di lato ½. La figura che rimane è costituita da tre quadrati di lato ½: da ciascuno di questi quadrati si toglie il quadratino in basso a destra di lato ¼ e così via. La figura mostra un triangolo di Sierpinski in cui abbiamo colorato tre zone: ciascuna parte è simile all'intero frattale.

- ▶ Fissato il sistema di riferimento con origine nell'angolo in basso a sinistra del quadrato in cui il frattale è costruito, determina le trasformazioni geometriche che, applicate al frattale, restituiscono uno dei sottofrattali indicati in figura (considera solo la forma, non i colori).

▶ Dobbiamo determinare le trasformazioni geometriche che applicate al frattale restituiscono la parte (1), oppure (2) oppure (3), tutte simili al frattale di partenza. Poiché ognuna delle tre parti è grande la metà della figura iniziale, occorrono 3 omotetie di ragione $\frac{1}{2}$ da comporre con opportune traslazioni.
Le trasformazioni sono:

$$T_1: \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x \\ y' = \frac{1}{2}y \end{cases}, \quad T_2: \begin{cases} x' = \square \\ y' = \frac{1}{2}y + \square \end{cases}, \quad T_3: \begin{cases} \square \\ \square \end{cases}.$$

T_1 è ______ di ragione $\frac{1}{2}$.

T_2 è un'omotetia di ragione ______ composta con una ______ secondo il vettore $\left(\square \right)$.

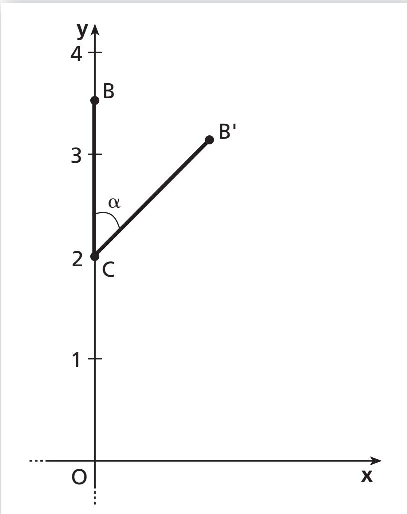
T_3 è ______ di ragione $\frac{1}{2}$ composta con una ______ secondo il vettore $\left(\square \right)$.

4 La tenda da sole

Sui balconi di alcuni appartamenti vengono installate delle tende da sole profonde 1,5 m; il perno attorno al quale la tenda ruota si trova a 2 m dal piano del terrazzo. Supponendo che per coprire una parte di balcone la tenda, da chiusa, venga aperta di 45°, determina:

- ▶ le equazioni della rotazione nel piano individuata dall'apertura della tenda (considera il sistema di riferimento Oxy con l'asse y verticale passante per il perno e l'asse x orizzontale appoggiato al piano del terrazzo e orientato verso la strada);
- ▶ di quanto bisogna inclinare la tenda affinché la parte opposta al perno raggiunga il 60% dell'altezza totale.

▶ Schematizziamo la situazione in figura (osserviamo la tenda di profilo).



◄ **Figura 5**

La rotazione di centro $C(x_C; y_C)$ e angolo α ha equazioni:

$$r(C;\alpha): \begin{cases} x' = \qquad \cos\alpha - (y - y_C) \qquad + \quad \\ y' = (x - x_C)\,\text{sen}\,\alpha + \qquad\qquad \quad y_C \end{cases}$$

La rotazione in esame avviene con centro $C(0; 2)$ e angolo $\alpha = \quad$. Ricordando che $\cos(-45°) = \quad$ e $\text{sen}(-45°) = \quad$, l'equazione diventa:

$$r(C;\alpha): \begin{cases} x' = \qquad\qquad \\ y' = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \qquad\qquad \end{cases}$$

▶ Per raggiungere il 60% dell'altezza totale (pari a 2 + 1,5 = 3,5 m), l'estremo libero B della tenda (con $y_B = \quad$) deve portarsi in B' (con $y_B = \quad$).
Calcoliamo l'angolo dall'equazione generale di una rotazione:

$$y' = (x - x_C)\,\text{sen}\,\alpha + \qquad\qquad + y_C \;\rightarrow\; y_{B'} = (x_B - x_C)\,\text{sen}\,\alpha + (y_B - y_C)\cos\alpha + y_C \;\rightarrow$$

$$\rightarrow \quad = (0 - 0)\,\text{sen}\,\alpha + \qquad\qquad + \quad \rightarrow\; 2{,}1 = \qquad\qquad \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos\alpha = \quad \rightarrow\; \alpha = \pm\arccos\left(\frac{1}{15}\right) \simeq \pm \quad .$$

Per come abbiamo posto il sistema di riferimento, dobbiamo considerare l'angolo negativo: $\alpha \simeq -86°$.