# VERSO L'UNIVERSITÀ

## *Funzioni continue su un intervallo*

### Proprietà puntuali o globali

Nello studio delle proprietà delle funzioni continue, lo studente ha incontrato teoremi di tipi diversi. Confrontiamo tra loro questi due enunciati:

**Teorema 1** *Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funzioni continue in $[a, b]$. Allora anche $f + g$ è continua in $[a, b]$.*

**Teorema 2 (di Weierstrass)** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$. Allora $f$ ha massimo e minimo.*

Scritti così, i teoremi sembrano avere una struttura logica simile. Notiamo che la proprietà del primo teorema è conseguenza di una proprietà delle funzioni continue *in un punto*. Precisamente, lo studente sa che:

**Teorema 3** *Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funzioni continue in $x_0 \in [a, b]$. Allora anche $f + g$ è continua in $x_0$.*

I Teoremi 1 e 2 riguardano funzioni continue *in un intervallo*; il Teorema 3 riguarda funzioni continue *in un punto*. Il Teorema 1 in realtà segue facilmente dal Teorema 3. Supponiamo che $f$ e $g$ siano continue in $[a, b]$, significa appunto che sono continue in ogni punto $x_0$ di $[a, b]$. Allora per il Teorema 3 anche $f + g$ è continua in $x_0$, e poiché questo è vero per ogni $x_0 \in [a, b]$, concludiamo che $f + g$ è continua in $[a, b]$.

Chiediamoci ora: il Teorema 2 si può vedere, analogamente, come conseguenza di una proprietà simile valida per funzioni continue *in un punto*? Provando a immaginare un tale ipotetico risultato, ci si accorge subito che questo non avrebbe alcun senso, o non sarebbe vero ("Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua in $x_0 \in [a, b]$, allora $f$ ha massimo e minimo..." ??!!).

Il motivo di questo è che il concetto di punto di massimo è per sua natura un concetto *globale*, ha a che fare cioè col comportamento di una funzione in un intervallo, non in un solo punto. Si dice che il Teorema 2 esprime una *proprietà globale* delle funzioni continue, mentre il Teorema 3 esprime una *proprietà puntuale* delle funzioni continue, e il Teorema 1 esprime una proprietà che, pur essendo formulata in modo globale, è conseguenza di una proprietà puntuale.

La validità della proprietà globale espressa dal Teorema 2, cioè l'esistenza dei punti di massimo e minimo nell'intervallo, è conseguenza di un'ipotesi globale: la continuità in tutto $[a, b]$. Lo studente infatti ha già incontrato e-sempi di funzioni $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ discontinue anche in un solo punto dell'intervallo, e che non possiedono né massimo né minimo. (Sapresti ricostruire un esempio di questo tipo ora?).

Il messaggio quindi è chiaro: senza l'ipotesi globale di continuità in $[a, b]$ non è possibile garantire l'esistenza di massimo e minimo in $[a, b]$.

Un discorso analogo vale per il *teorema degli zeri*:

**Teorema 4** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e supponiamo $f(a) f(b) < 0$. Allora esiste un punto $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = 0$.*

Anche in questo caso, senza l'ipotesi globale di continuità su tutto l'intervallo, non è possibile garantire che una funzione che assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo si annulli in almeno un punto. Lo studente provi a ricostruire ora un esempio (che sicuramente ha studiato) di funzione discontinua in un solo punto di $[a, b]$ per cui $f(a) > 0, f(b) < 0$, ma $f$ non si annulla mai.

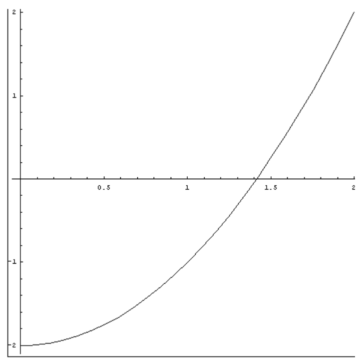
## Continuità e numeri reali

Vogliamo ora andare oltre la semplice constatazione dell'importanza dell'ipotesi di continuità globale, e capire meglio la ragione di questa importanza.

Si dice a volte che una funzione *continua su un intervallo* è una funzione il cui grafico può essere tracciato *senza staccare la penna dal foglio*. Questa immagine è un modo efficace di collegare il concetto di funzione continua con la nostra idea intuitiva di "linea continua". Ma proviamo a scavare un po' più a fondo. Supponiamo per un momento di conoscere solo i numeri *razionali*, e di voler studiare le proprietà delle funzioni in questo ambito. Almeno per funzioni abbastanza semplici questo è possibile. Consideriamo ad esempio la funzione

$$f(x) = x^2 - 2.$$

Se $x$ è un numero razionale, anche $x^2 - 2$ è razionale (perché?), dunque $f$ si può vedere come funzione da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{Q}$. Consideriamola definita su un intervallo di $\mathbb{Q}$, ad esempio $[0, 2] \cap \mathbb{Q}$, cioè l'insieme dei soli numeri *razionali* compresi tra 0 e 2. Il grafico di questa funzione è:

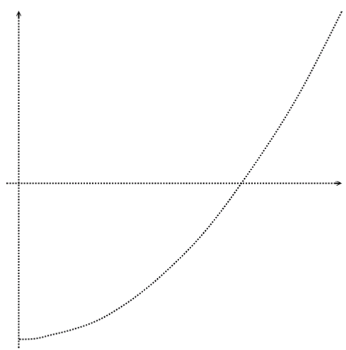



Osserviamo che il grafico della funzione $f$ su $[0,2]\cap\mathbb{Q}$, visto "a occhio nudo" non è diverso dal grafico della "solita" parabola $y=x^2-2$ sull'intervallo $[0,2]$, in quanto i numeri razionali sono distribuiti in modo molto fitto nell'insieme dei numeri reali. Tuttavia, la nostra funzione $f$ ha proprietà diverse. Ad esempio:

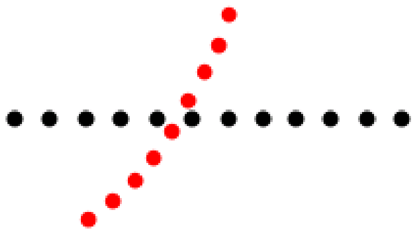
$f(0)=-2<0$; $f(2)=2>0$; $f$ è continua in $[0,2]\cap\mathbb{Q}$. Per il teorema degli zeri, dovrebbe esistere un punto $x_0\in[0,2]\cap\mathbb{Q}$ tale che $f(x_0)=0$, ma questo significherebbe che per un certo numero *razionale* $x_0$ si abbia $x_0^2=2$, cosa che sappiamo essere impossibile.

Cosa significa? Significa che il teorema degli zeri non vale per le funzioni definite su intervalli di $\mathbb{Q}$; il fatto che le funzioni continue che consideriamo nel teorema degli zeri (o nel teorema di Weierstrass) siano definite su intervalli di $\mathbb{R}$ è un'ipotesi essenziale del teorema, che normalmente accettiamo in modo un po' implicito. L'esempio fatto ci dice che l'idea geometrica di "funzione il cui grafico si può tracciare senza staccare la penna dal foglio" traduce correttamente l'idea di funzione continua *su un intervallo della retta reale*, ma non su un intervallo della retta razionale.

Si può dire anche così: se potessimo "guardare al microscopio" il grafico della funzione $x^2-2$ su $[0,2]\cap\mathbb{Q}$ vedremmo qualcosa di questo tipo:



e ingrandendo ancora meglio l'immagine vicino al punto di intersezione della curva con l'asse $x$ vedremmo che...



...non c'è nessuna intersezione! Cioè non c'è nessun *punto in comune*, anche se la curva attraversa la linea orizzontale dell'asse $x$. Senza voler prendere troppo sul serio queste figure di fantasia, le idee da trattenere sono:

-L'insieme dei numeri reali è una buona rappresentazione della retta, intesa come insieme unidimensionale continuo, ossia "privo di buchi"; l'insieme dei numeri razionali, invece, ha infinite "interruzioni". Questa è la ragione per cui l'insieme dei numeri razionali è inadeguato ad esprimere le lunghezze dei segmenti, un fatto con cui lo studente si è già scontrato, ad esempio quando ha studiato l'incommensurabilità del lato e della diagonale del quadrato. Un intervallo di $\mathbb{R}$ è un'immagine fedele di un segmento.

-Il grafico di una funzione continua definita su un intervallo di $\mathbb{R}$ si può vedere, in modo analogo, come un'immagine fedele di un tratto di linea continua, curva anziché rettilinea. Le proprietà che intuitivamente riconosciamo vere per le linee che si possono tracciare senza staccare la penna dal foglio sono ben riflesse nelle proprietà delle funzioni continue su un intervallo di $\mathbb{R}$, mentre non lo sono se sostituiamo $\mathbb{R}$ con $\mathbb{Q}$.

-Ricordiamo che il teorema di Weierstrass, in cui pure entra in modo essenziale il fatto di considerare funzioni continue su un intervallo di $\mathbb{R}$, è stato utilizzato nella dimostrazione del teorema di Rolle, con cui a sua volta si è dimostrato il teorema di Lagrange, da cui seguono molti fatti importanti del calcolo differenziale e integrale. Questo è uno dei motivi profondi per cui l'insieme dei numeri reali, e non quello dei numeri razionali, è l'ambiente naturale in cui studiare le proprietà delle funzioni, e quindi è l'ambiente naturale per l'analisi matematica.

**Esercizio 5** *1) Si studi la funzione*

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x + 2}$$

*e se ne tracci il grafico limitatamente all'intervallo* $[-1, 0]$.

*2) Si osservi che per $x$ razionale si ha $f(x)$ razionale, quindi questa funzione si può vedere anche come funzione da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{Q}$. In particolare, possiamo considerarla come funzione continua sull'intervallo (dei razionali) $[-1,0]\cap\mathbb{Q}$. Si noti che in questo insieme $f$ non ammette minimo (perché il punto di minimo, determinato al punto 1), ha ascissa irrazionale!). Questo esempio mostra che anche il teorema di Weierstrass non vale nell'ambiente dei numeri razionali.*

**Esercizio 6** *In questo esercizio consideriamo, come di consueto, funzioni reali di variabile reale. Si chiede di costruire i seguenti esempi.*

*(a) Una funzione continua in $(0,1)$ che non ammette massimo né minimo.*

*(b) Una funzione discontinua in $[0,1]$ che non ammette né massimo né minimo.*

*(c) Una funzione continua e limitata in $(-\infty,+\infty)$ che non ammette né massimo né minimo.*

*(d) Una funzione discontinua in $[0,1]$ che ammette sia massimo che minimo.*

*(e) Una funzione continua in $(0,1)$ che ammette sia massimo che minimo.*

Un commento sulle ultime due richieste degli esercizi precedenti. Solitamente per mostrare l'importanza delle ipotesi di un teorema si esibiscono *contresempi*, cioè esempi di situazioni in cui è violata una delle ipotesi, e la tesi viene a cadere. Ai punti (a), (b), (c) si chiede appunto di esibire contresempi di questo tipo. Tuttavia è bene riflettere anche sul fatto che quando è violata una delle ipotesi il teorema non si può applicare e quindi non si può concludere che vale la tesi, ma *neppure escludere questa eventualità*. Le richieste dei punti (d), (e) dell'esercizio precedente mirano a evidenziare questo fatto.

Occorre perciò stare attenti a come ci si esprime; ad esempio, *sono scorrette* le seguenti affermazioni (lo studente spieghi perché):

"Questa funzione non ha massimo e minimo su $[0,1]$ perché non è continua"

"Perché una funzione definita su $[a,b]$ abbia massimo e minimo è necessario che sia continua".

**Esercizio 7** *In precedenza abbiamo scritto che "i numeri razionali sono distribuiti in modo molto fitto nell'insieme dei numeri reali". Vogliamo dare una formulazione più rigorosa di questo fatto:*

*"Dati due numeri reali $a,b$ qualsiasi, diversi tra loro, esiste un numero razionale $c$ compreso tra essi".*

*Si dimostri l'affermazione precedente descrivendo una procedura esplicita per costruire il numero $c$ a partire da $a$ e $b$.*

*[Suggerimento: ragionare sulla scrittura in forma decimale di $a, b, c$. Prestare attenzione al fatto che la procedura descritta funzioni senza eccezioni, cioè per $a, b$ razionali o irrazionali, e un allineamento decimale qualunque].*

**Esercizio 8** *Il teorema di Weierstrass riguarda funzioni continue definite in un intervallo chiuso e limitato. Esistono delle varianti del teorema che valgono per funzioni continue definite su intervalli illimitati. Si considerino in proposito i prossimi enunciati. Non si chiede di fare dimostrazioni formali, ma di riflettere su ognuno di essi cercando, anche mediante esempi, di capire se sono veri o falsi. (Se sono falsi, esibire un contresempio).*

*(a) Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua e limitata. Allora $f$ ha massimo e minimo.*

*(b) Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua ed esista finito $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. Allora $f$ ha massimo e minimo.*

*(c) Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua, sia $f(x) \geq 0$ per ogni $x$ e supponiamo che esista $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Allora $f$ ha massimo.*

# SOLUZIONI

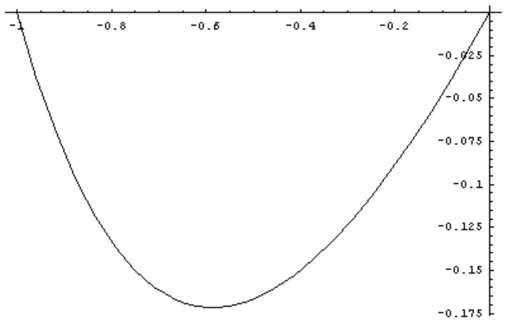
*Soluzione dell'Esercizio 5.*

La funzione è definita e continua in tutto $[-1, 0]$, e si annulla ai due estremi dell'intervallo. Calcoliamo

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x+2) - (x^2+x)}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+2}{(x+2)^2} \geq 0 \text{ per}$$

$$x^2 + 4x + 2 \geq 0, \text{ cioè } x \leq -2 - \sqrt{2}, \ x \geq -2 + \sqrt{2}.$$

Restringendo lo studio a $[-1, 0]$ vediamo che $f$ ha un punto di minimo in $x = -2 + \sqrt{2}$, è crescente alla destra e decrescente alla sinistra di tale punto. Il grafico è:




Notiamo che il punto $-2 + \sqrt{2}$ è irrazionale, perciò la funzione non ammette minimo in $[-1, 0] \cap \mathbb{Q}$.

*Soluzione dell'Esercizio 6.*

(a) $f(x) = x$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & \text{per } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{per } x = \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{2} & \text{per } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

(c) $f(x) = \arctan x$

(d)

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{per } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x & \text{per } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

(e) $f(x) = \sin(2\pi x)$

*Soluzione dell'Esercizio 7.*

Proviamo l'enunciato prima supponendo $a$ e $b$ non negativi. Sia quindi $0 \leq a \leq b$ e scriviamo $a$ e $b$ in forma decimale.

Se $a$ e $b$ hanno parte intera *diversa* (es. $a = 23,99682$ e $b = 24,76$): consideriamo le cifre decimali di $a$ dopo la virgola; prendiamo la prima cifra diversa da 9 (dev'essercene una perché la scrittura 9 periodico si può evitare) e la sostituiamo con la cifra successiva; quindi buttiamo via le cifre seguenti. Quello così ottenuto è il numero $c$. (Ad esempio: se $a = 23,99682$ scegliamo $c = 23.997$). Il numero così ottenuto è maggiore di $a$ e minore di $a+1$, quindi minore o uguale di $b$.

Se $a$ e $b$ hanno la stessa parte intera (es. $a = 23,99982$ e $b = 23,99724$): consideriamo la prima cifra decimale di $a$ diversa dalla corrispondente cifra decimale di $b$. Se questa è anche diversa da 9, la incrementiamo di un'unità e buttiamo via le cifre seguenti. Questo è il numero $c$. Se invece è uguale a 9, ci spostiamo a destra nell'allineamento decimale fino alla prima cifra diversa da 9, e poi facciamo come sopra. Il numero $c$ così trovato è razionale (in particolare, ha un allineamento decimale finito dopo la virgola), ed è compreso tra $a$ e $b$.

Si noti che la procedura precedente funziona anche se uno o entrambi tra $a$ e $b$ sono irrazionali. Se fossero entrambi razionali potremmo semplicemente prendere come $c$ la loro media (oppure uno dei due: il testo del problema non richiede che $c$ sia *strettamente* compreso tra $a$ e $b$).

Se ora $a, b$ sono entrambi non positivi, si applica la procedura precedente a $-a, -b$ e si cambia poi segno al numero $c$ così costruito.

Se infine $a < 0 < b$ basta prendere $c = 0$.

*Soluzione dell'Esercizio 8.*

(a) Falso. $f(x) = \arctan x$ è continua e limitata in $[0, +\infty)$, ma non ha massimo. Se vogliamo un esempio di funzione continua e limitata in $[0, +\infty)$ che non ha né massimo né minimo possiamo prendere $f(x) = (\sin x) \cdot (\arctan x)$.

(b) Falso. Ancora $f(x) = \arctan x$ è continua e limitata in $[0, +\infty)$, tende a $\pi/2$ per $x \to +\infty$, ma non ha massimo.

(c) Vero. La dimostrazione utilizza anche il concetto di *estremo superiore.*

Poiché $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e $f(x) \geq 0$, esiste $K > 0$ tale che $0 \leq f(x) \leq 1$ per $x \geq K$. D'altro canto in $[0, K]$ $f$ ha massimo per il teorema di Weierstrass. Ne deduciamo che $f$ è limitata in $[0, +\infty)$, quindi

$$\sup \{f(x) : x \in [0, +\infty)\} \equiv \Lambda < \infty.$$

Possiamo supporre $\Lambda > 0$, altrimenti $f$ è identicamente nulla e ha ovviamente massimo. Poiché $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ esiste $H > 0$ tale che $0 \leq f(x) \leq \Lambda/2$ per $x \geq H$. D'altro canto in $[0, H]$ $f$ ha massimo, sia esso $M = f(x_0)$. Dev'essere $M = \Lambda$ altrimenti essendo $f(x) \leq \Lambda/2$ in $[H, +\infty)$ e $f(x) \leq M$

in $[0, H]$ non potrebbe risultare $\Lambda = \sup f$. Perciò $\Lambda = f(x_0)$, e $x_0$ è punto di massimo per $f$ in $[0, +\infty)$.