VERSO L'UNIVERSITÀ

Studiamo la definizione di derivata

Calcolare o definire?

Quando scriviamo

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

stiamo definendo o calcolando la derivata / retta tangente? Stiamo cioè imparando ad operare con qualcosa che *conosciamo già*, oppure siamo veramente di fronte ad un concetto nuovo?

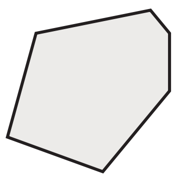
Chiariamo subito: stiamo <u>definendo</u> la retta tangente al grafico di una funzione in un dato punto. Si può "calcolare" solo qualcosa che è stato definito in precedenza.

Tuttavia la retta tangente non è un concetto completamente nuovo per lo studente, e da questo può nascere una comprensibile confusione, che in questa lezione di "Verso l'università" vogliamo affrontare.

Ci sono due difficoltà intrecciate: capire come nasce e come si studia una definizione, e allo stesso tempo trattare un argomento come il calcolo differenziale, forse il più ostico nella matematica della Scuola Superiore. Per separarare almeno temporaneamente queste due difficoltà cerchiamo di capire come si studia una definizione attraverso un esempio, forse familiare e comunque più semplice, che rivelerà qualche analogia con la definizione di derivata.

Un esempio di definizione

In geometria abbiamo definito *convessi* i poligoni con gli angoli interni minori di 180°.

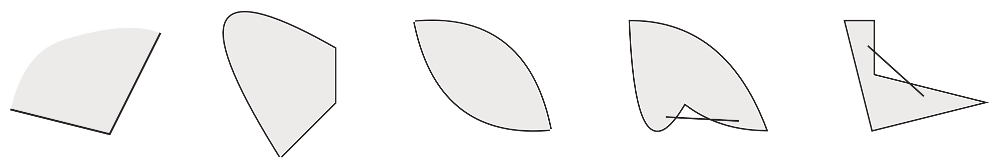


Adesso supponiamo che ci venga chiesto se un cerchio è convesso. Probabilmente risponderemmo *sì*, e avremmo insieme torto e ragione. Torto perché abbiamo parlato di convessità solo per i poligoni, e un cerchio non è un poligono. Ragione perché in realtà associamo la forma di un poligono convesso al fatto di *non avere rientranze*; forse non sappiamo dirlo meglio, ma siamo in grado di riconoscere un insieme *con rientranze* da un insieme *senza rientranze*. Siamo cioè in grado di riconoscere un concetto matematico prima di averlo definito. In matematica questo è normale: definiamo infatti ciò che *già vediamo*, e una buona definizione ci permette poi di trattare tutti gli oggetti che hanno quella proprietà, deducendone in modo rigoroso teoremi e proprietà. Dalla definizione di convessità attraverso gli angoli (applicabile solo ad un poligono) passiamo allora alla seguente.

Definizione A. *Un sottoinsieme A del piano è detto convesso se comunque si scelgano due punti* $\mathbf{p}$ *e* $\mathbf{q}$ *appartenenti ad A, il segmento* $\mathbf{pq}$ *che congiunge* $\mathbf{p}$ *e* $\mathbf{q}$ *è interamente contenuto in A.*

Immaginiamo di dovere studiare questa definizione. Nessun lettore avveduto pensa che studiare una definizione significhi solo *saperla ripetere*. Bisogna averla capita, e su questo siamo d'accordo, ma cosa significa capire una definizione? Significa prendere carta e matita e seguire un protocollo come il seguente.

Primo passo. Cercare esempi di oggetti che soddisfano la definizione ed esempi di oggetti che non la soddisfano. Ad esempio, le prime tre figure soddisfano la definizione di convessità, mentre la quarta e la quinta no (abbiamo per queste ultime evidenziato due segmenti che hanno gli estremi nel proprio insieme, ma non sono interamente contenuti in esso).



Altri esempi di insiemi convessi sono i cerchi, i quadrati, i segmenti, gli angoli di ampiezza non superiore a 180°; mentre esempi di insiemi non convessi sono una circonferenza (cioè il bordo di un cerchio), il piano privato di un punto, i punti del piano (cartesiano) con coordinate intere.

Secondo passo. Cercare di dimostrare qualche proprietà legata alla definizione che si sta studiando. È meglio che queste domande siano poste dal libro o dal docente, ma non è proibito porsele da soli. L'esercizio che segue è un elenco di domande relative alla Definizione A. Le soluzioni di questo e degli altri esercizi sono in fondo alla lezione.

Esercizio 1 *Rispondere alle seguenti domande.*

(a) *È vero che l'unione di due insiemi convessi è convessa?*

(b) *È vero che l'intersezione di due insiemi convessi è convessa?*

(c) *È vero che il complementare di un insieme convesso è non convesso?*

(d) *È possibile che l'unione di due insiemi non convessi sia convessa?*

(e) *È possibile che una retta intersechi un insieme convesso in esattamente due punti?*

(f) *Per quali interi positivi n si ha l'esistenza di poligoni di n lati non convessi?*

Terzo passo. Nel caso ciò abbia senso, verificare che la definizione che si sta studiando coincide con quella che conosciamo in casi particolari. Nel nostro caso significa verificare (o almeno convincersi) che un poligono B ha tutti gli angoli interni minori di $180°$ se e solo se comunque si scelgano due punti $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ appartenenti a B, il segmento $\mathbf{pq}$ è interamente contenuto in B (omettiamo la dimostrazione).

Studiamo la definizione di derivata

Dopo avere cercato di chiarire attraverso un esempio cosa significa studiare una definizione, torniamo alla derivata e alla retta tangente. Anche qui sappiamo in anticipo di cosa stiamo parlando, poiché la retta tangente è stata negli anni scorsi definita per una parabola $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ (con $\alpha \neq 0$), il cui grafico è tangente in un punto $(c, \alpha c^2 + \beta c + \gamma)$ ad una retta di equazione $y = (\alpha c^2 + \beta c + \gamma) + m(x - c)$ se e solo se l'equazione di secondo grado $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = (\alpha c^2 + \beta c + \gamma) + m(x - c)$ ha due soluzioni coincidenti, cioè il suo discriminante è nullo. Prima di procedere è bene essere sicuri di ricordare tutto questo. Il lettore svolga il seguente esercizio (se incontra difficoltà, deve passare a qualche esercizio analogo, recuperato sui testi degli anni precedenti).

Esercizio 2 *Determinare la retta tangente alla parabola* $f(x) = 2x^2 - 2x + 3/2$ *nel punto* $(2, 11/2)$ *e disegnare retta e parabola sul piano cartesiano.*

Questa definizione (studiata negli anni precedenti) di retta tangente ad una parabola è l'analogo della definizione di poligono convesso. È una definizione chiara, ma non si vede come estenderla a grafici di funzioni molto più generali. Si può ad esempio passare ad una funzione polinomiale, come una cubica (determinare come esercizio l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = x^3 - x$ nel punto $(0, 0)$ imponendo che l'equazione $x^3 - x = mx$ abbia almeno due soluzioni coincidenti). Ma a parte le difficoltà legate ad equazioni algebriche di grado alto, sorge un problema più generale. Nel caso della parabola e in quello della cubica la (implicita) definizione di tangenza è grossomodo la seguente: una retta $y = mx + q$ e il grafico della funzione $y = f(x)$ (dove $f(x)$ è un polinomio) sono tangenti nel punto $(c, f(c))$ se il polinomio $P(x) = f(x) - (mx + q)$ è divisibile per $(x - c)^2$.

Per funzioni più generali siamo in difficoltà: non sappiamo ad esempio come scrivere una simile definizione di retta tangente per $f(x) = \sin(x)$. Nel caso della convessità abbiamo trovato una definizione (la Definizione A) che non coinvolge gli angoli; per le tangenti abbandoniamo il punto di vista algebrico e arriviamo così alla definizione che abbiamo studiato in Analisi Matematica.

Definizione B *Data una funzione* $y = f(x)$ *definita in un intervallo* $[a; b]$*, si chiama derivata della funzione nel punto* c *interno all'intervallo, e si indica con* $f'(c)$*, il limite, se esiste ed è finito, per* h *che tende a* 0*, del rapporto incrementale di* f *relativo a* c*:*

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} .$$

Studiamo la Definizione B, ricordando come ci siamo mossi nello studio della Definizione A.

Il **primo passo** consiste nel pensare ad alcuni esempi. In questo caso è utile applicare la definizione a varie funzioni, come nel seguente esercizio.

Esercizio 3 *Calcolare attraverso la definizione le derivate delle seguenti funzioni nei punti indicati.*

$f(x) = x^3 - x, \quad in\ x = 0$,
$f(x) = x \log(x), \quad in\ x = 1$,
$f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}, \quad in\ x = c$.

Il **secondo passo** consiste nel rispondere a qualche domanda di tipo teorico relativa alla definizione che stiamo studiando. Ad esempio quelle contenute nel seguente esercizio.

Esercizio 4 *Rispondere alle seguenti domande.*

(*a*) *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *derivabile in* $x = 0$*. È vero che allora* f *è derivabile anche in* $x = 1$*?*

(*b*) *Quali delle seguenti uguaglianze sono vere?*

$$i)\ \ f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c-h) - f(c)}{-h} ,$$

$$ii)\ \ f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h^2) - f(c)}{h^2} ,$$

$$iii)\ \ f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h^2) - f(c)}{h} ,$$

$$iv)\ \ f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c) + f(h) - f(c)}{h} .$$

(c) *È vero che f è derivabile in c se e solo se i due limiti*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}, \qquad \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

esistono finiti e sono uguali?

(d) *Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivabile in ogni punto $x\in\mathbb{R}$ e dispari, tale cioè che $f(x)=-f(-x)$ per ogni $x\in\mathbb{R}$. È vero che la funzione $f'(x)$ è pari, cioè che $f'(x)=f'(-x)$ per ogni $x\in\mathbb{R}$?*

(e) *Sia $f(x)$ derivabile in c e sia r la retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto $(c,f(c))$. È possibile che esista una retta s diversa da r che interseca il grafico di $f(x)$ solo nel punto $(c,f(c))$?*

(f) *È possibile che una retta sia tangente in due punti al grafico di una funzione $f(x)$?*

Il **terzo passo** consiste nel verificare che la Definizione B coincide con quella già nota in casi particolari. Per questo è utile il seguente

Esercizio 5 *Verificare che le due definizioni di retta tangente fin qui viste coincidono nel caso della generica parabola $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, nel punto $(c,\alpha c^2+\beta c+\gamma)$.*

Ulteriori osservazioni

Terminiamo questa chiacchierata su come si studia una definizione guardando più in dettaglio la definizione di derivata di una funzione $f(x)$. In essa la retta tangente nel punto $(c,f(c))$ viene implicitamente definita come la retta passante per il punto $(c,f(c))$ e avente come coefficiente angolare il limite dei coefficienti angolari delle rette secanti, al tendere a 0 dell'incremento. Dal punto di vista geometrico questa scelta è convincente. Meno chiara è la richiesta di accettare il limite "se esiste ed è finito". Perché non chiedere solo che il limite esista e scrivere ad esempio che se $f(x)=x^{1/3}$ allora

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{(0+h)^{1/3}-0}{h}=\lim_{h\to 0} h^{-2/3}=+\infty\ ?$$

Per rispondere iniziamo dicendo che una definizione è una definizione, non il risultato di un calcolo. Quindi, se non ci sono errori logici, non si può dire che una definizione è "sbagliata". Ricordiamo però che una definizione nasce per descrivere un concetto che noi già in parte vediamo (ad esempio, avevamo "visto" l'idea di convessità prima di pensare alla Definizione A). Inoltre una definizione deve essere chiara e contribuire a creare, insieme alle altre definizioni e ai teoremi, una teoria il più possibile semplice.

Chiariamo questo punto di vista con un esempio elementare. In geometria si dice che un rettangolo è un quadrilatero con quattro angoli retti e quindi un quadrato è un rettangolo (anche se a volte qualche studente è perplesso su questo punto). Uno studente perplesso e smaliziato potrebbe però dire: "Cosa ci sarebbe di sbagliato nel chiamare rettangolo un quadrilatero con quattro angoli uguali e non tutti i lati uguali?" Non ci sarebbe nulla di sbagliato, ma la descrizione dei quadrilateri diventerebbe un po' più pesante: grazie alla definizione usuale sappiamo che l'insieme dei quadrati è contenuto nell'insieme dei rettangoli, che è contenuto nell'insieme dei parallelogrammi, che è contenuto nell'insieme dei quadrilateri. Se cambiamo la definizione di rettangolo questa semplice descrizione diventa un po' più complicata, non molto, ma un po' sì, e questo è un motivo sufficiente per continuare a chiamare rettangolo un quadrilatero con quattro angoli retti.

Con questo esempio in mente, torniamo alla domanda iniziale: perché non accettiamo la derivata infinita? Per rispondere scorriamo la teoria per capire dove si usa il fatto che il limite che definisce la derivata è finito. Troviamo sostanzialmente un punto, laddove si dimostra che una funzione derivabile è continua. Possiamo concludere che la richiesta che f' sia finita serve per dimostrare che la derivabilità implica la continuità? Non ancora: il fatto che nella dimostrazione di un teorema si usa una certa ipotesi <u>non</u> significa che senza questa ipotesi il teorema è falso: potrebbe esistere una dimostrazione più furba che arriva alla tesi senza utilizzare questa ipotesi (dopotutto, l'unico esempio fin qui visto di funzione con derivata infinita è $f(x) = x^{1/3}$, che <u>è</u> continua in $x = 0$). In realtà l'ipotesi di limitatezza della derivata è necessaria per dedurre la continuità: per dimostrarlo dobbiamo produrre un esempio di funzione con derivata infinita in un punto e ivi discontinua. Sia

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases} .$$

Esercizio 6 *Osservare che f è discontinua e verificare che*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = +\infty .$$

Adesso (in analogia con il precedente discorso sui rettangoli) è corretto concludere che la Definizione B permette una descrizione più semplice delle funzioni: l'insieme delle funzioni continue contiene l'insieme delle funzioni derivabili.

SOLUZIONI

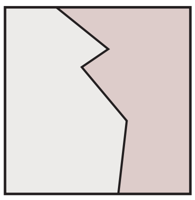
Soluzione dell'Esercizio 1.

(a) Non è vero. È sufficiente considerare due quadrati senza punti comuni.

(b) È vero. Siano infatti A e B convessi e siano $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ due punti in $A \cap B$. Poiché $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ appartengono ad A, il segmento $\mathbf{pq}$ è contenuto in A per l'ipotesi di convessità di A. Per lo stesso motivo $\mathbf{pq}$ è contenuto in B. Dunque $\mathbf{pq} \subseteq A \cap B$ e quindi $A \cap B$ è convesso.

(c) Non è vero. Un semipiano (comprendente o meno la retta al bordo) è convesso e il suo complementare (ancora un semipiano) pure.

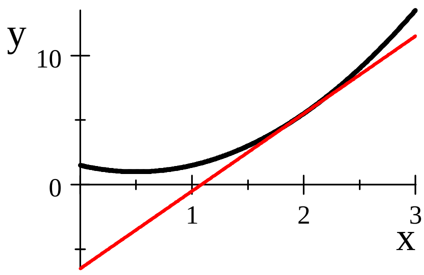
(d) È possibile. Ad esempio il quadrato in figura è unione di due insiemi non convessi.



(e) Non è possibile. Altrimenti il segmento che congiunge i due punti non sarebbe contenuto nell'insieme.

(f) Per $n \geq 4$. I segmenti e i triangoli sono convessi, mentre è facile costruire un quadrilatero non convesso.

Soluzione dell'Esercizio 2. La retta tangente è $y = 6x - 13/2$, e il problema è rappresentato dal disegno seguente.



Soluzione dell'Esercizio 3.

Se $f(x) = x^3 - x$,

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(h^3 - h) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \left(h^2 - 1\right) = -1 \ .$$

Se $f(x) = x \log(x)$,

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)\log(1+h) - 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (1+h) \frac{\log(1+h)}{h} = 1 \ . \end{aligned}$$

Se $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$,

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{c+h}{(c+h)^2+1} - \frac{c}{c^2+1}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(c+h)(c^2+1) - c\left((c+h)^2+1\right)}{h(c^2+1)\left((c+h)^2+1\right)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h - hc^2 - ch^2}{h(c^2+1)\left((c+h)^2+1\right)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1 - c^2 - ch}{(c^2+1)\left((c+h)^2+1\right)} = \frac{1-c^2}{(c^2+1)^2} \ . \end{aligned}$$

Soluzione dell'Esercizio 4.

(*a*) Non è vero. Un contresempio è costituito da $f(x) = |x-1|$.

(*b*)

L'uguaglianza *i*) è vera, poiché $h \to 0$ se e solo se $-h \to 0$.

L'uguaglianza *ii*) è vera, poiché $h \to 0$ se e solo se $h^2 \to 0$.

L'uguaglianza *iii*) è falsa. Sia infatti $f(x) = x$ e c qualsiasi, allora

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h^2) - f(c)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c + h^2 - c}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0 \ ,$$

mentre sappiamo che la retta $f(x) = x$ coincide ovviamente con la sua tangente e ha coefficiente angolare 1.

L'uguaglianza *iv*) è falsa, come è facile sospettare dal fatto che

$$\frac{f(c) + f(h) - f(c)}{h} = \frac{f(h)}{h}$$

non dipende da c. Sia infatti $f(x) = x^2$ e $c = 1$, allora

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1) + f(h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0 \ ,$$

mentre sappiamo che $f'(x) = 2x$ e quindi $f'(1) = 2$.

(c) È vero. Infatti se

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = A \ ,$$

allora lo stesso vale per $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$, dato che se "per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno di 0 ..." allora, in particolare, "per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno destro di 0 ...". Analogamente per $\lim_{h\to 0^-}$. Viceversa, se

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = A \ ,$$

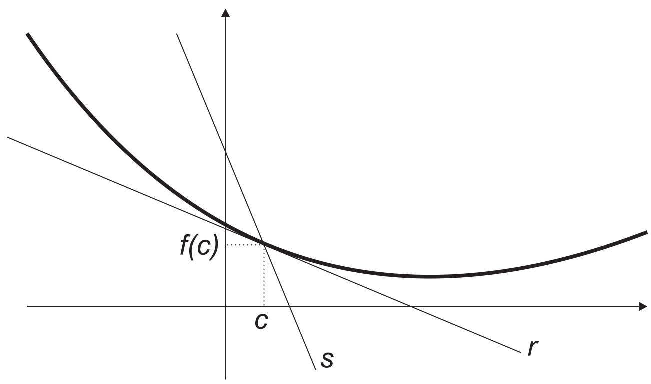
allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_1 > 0$ tale che se $0 < h < \delta_1$ allora abbiamo $\left|\frac{f(c+h)-f(c)}{h} - A\right| < \varepsilon$, ed esiste $\delta_2 > 0$ tale che se $-\delta_2 < h < 0$ allora abbiamo $\left|\frac{f(c+h)-f(c)}{h} - A\right| < \varepsilon$. Quindi, se $-\delta_2 < h < \delta_1$ (eventualmente $h \neq 0$) abbiamo $\left|\frac{f(c+h)-f(c)}{h} - A\right| < \varepsilon$, e dunque $\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = A$.

(d) È vero. Infatti se f è dispari, allora

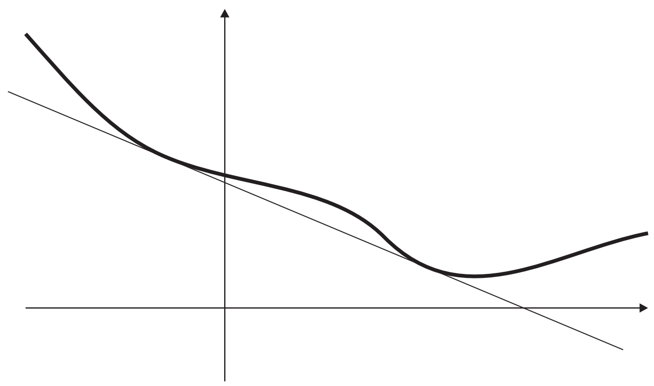
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-f(-x-h) + f(-x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-x-h) - f(-x)}{-h} = f'(-x) \end{aligned}$$

per il punto $i)$ della domanda (b).

(e) È possibile. Guardiamo ad esempio il seguente disegno.



(f) È possibile. Guardiamo ad esempio il seguente disegno.



Soluzione dell'Esercizio 5. L'equazione di secondo grado

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha c^2 + \beta c + \gamma + m(x - c)$$
$$\alpha x^2 + (\beta - m)x - \left(\alpha c^2 + \beta c - mc\right) = 0$$

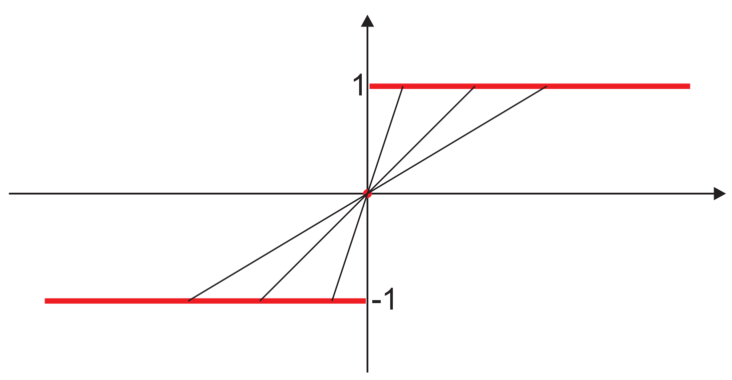
ha due soluzioni coincidenti se e solo se

$$(\beta - m)^2 + 4\alpha\left(\alpha c^2 + \beta c - mc\right) = 0$$

cioè $m = 2\alpha c + \beta$. D'altra parte $f'(x) = 2\alpha x + \beta$, e quindi, secondo la definizione vista in Analisi Matematica, la retta tangente è

$$y - \left(\alpha c^2 + \beta c + \gamma\right) = (2\alpha c + \beta)(x - c) \;\; .$$

Soluzione dell'Esercizio 6. È chiaro che f non è continua in 0. Se osserviamo i coefficienti angolari delle corde che partono dal punto $(0,0)$



vediamo che

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} = +\infty\ ,$$
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-1}{h} = +\infty$$

e quindi

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = +\infty\ .$$