# MATRICI E DETERMINANTI

## 1. LE MATRICI

Consideriamo la seguente tabella di numeri presi da un'estrazione del lotto:

$$\begin{bmatrix} 12 & 35 & 7 & 80 & 21 \\ 2 & 80 & 21 & 7 & 65 \\ 28 & 53 & 6 & 82 & 9 \end{bmatrix}.$$

I numeri presenti sono disposti su 3 righe e 5 colonne. Essi costituiscono un'insieme ordinato di $3 \times 5$ elementi.
Volendo rappresentare un qualunque insieme di numeri, ordinato come in una tabella, si utilizza un quadro composto da righe e da colonne, delimitato a destra e a sinistra da due parentesi quadre:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & -1 & 6 \\ 3 & 1 & 5 & 7 & 0 \\ 5 & 2 & -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Un quadro di questo tipo viene detto **matrice**.

**DEFINIZIONE**

**Matrice**

Dati $m \times n$ numeri, la tabella che li ordina in $m$ righe e $n$ colonne viene detta matrice.

Gli $m \times n$ numeri presenti nella matrice si chiamano **elementi** della matrice.

Se il numero delle righe è diverso da quello delle colonne, la matrice si dice **rettangolare**, altrimenti si dice **quadrata**.

**ESEMPIO**

La matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ è rettangolare, perché è formata da 2 righe e 4 colonne.

La matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ è quadrata, perché è formata da 3 righe e 3 colonne.

Per indicare gli elementi generici di una matrice $m \times n$, utilizziamo una lettera dell'alfabeto, per esempio $a$, munita di due indici; il primo indica il numero di riga e il secondo il numero di colonna. Per esempio, l'elemento $a_{32}$ si trova all'incrocio fra la 3ª riga e la 2ª colonna.

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 8 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$a_{32} = 8$

terza riga

seconda colonna

Una matrice generica di 3 righe e 4 colonne può essere rappresentata nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}.$$

Più in generale, una matrice $m \times n$ è indicata nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$m$ è il numero di righe,
$n$ è il numero di colonne.

- La scrittura $A = [a_{ik}]$, con $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq k \leq n$, è una maniera abbreviata per descrivere una matrice $m \times n$.

Si è soliti indicare una matrice con lettere maiuscole: $A, B, C, \dots$ I suoi elementi si rappresentano, come abbiamo visto, con lettere minuscole contrassegnate da due indici.

Due matrici $m \times n$ vengono dette **dello stesso tipo** e gli elementi che occupano lo stesso posto nelle due matrici si dicono **elementi corrispondenti**.

- Elementi corrispondenti sono 3 e 5, 4 e $-6$, 5 e 7, …

**ESEMPIO**

Le matrici $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 5 & -6 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ sono dello stesso tipo, perché entrambe sono formate da 2 righe e 3 colonne.

Due matrici dello stesso tipo sono **uguali** se gli elementi corrispondenti sono uguali.

**ESEMPIO**

Le matrici $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 6:3 \\ 3-1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & -2-1 & 2 \\ 2 & 4:4 & 0 \end{bmatrix}$ sono uguali.

Due matrici dello stesso tipo sono **opposte** quando gli elementi corrispondenti sono opposti.

- La matrice opposta di $A$ si indica con $-A$.

**ESEMPIO**

Le matrici $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ sono opposte.

## Matrici particolari

**DEFINIZIONE**

**Matrice nulla**

Una matrice è nulla se tutti i suoi elementi sono uguali a 0.

- $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ è una matrice nulla.

La matrice nulla si indica con il simbolo $O$ oppure $O_{mn}$ se si vuole precisare il numero delle righe e delle colonne.

**DEFINIZIONE**

**Matrice riga**

Una matrice formata da una sola riga si chiama matrice riga o vettore riga.

- La matrice $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ è una matrice riga.

**DEFINIZIONE**

**Matrice colonna**

Una matrice formata da una sola colonna si chiama matrice colonna o vettore colonna.

- La matrice $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ è una matrice colonna.

## Le matrici quadrate

Una generica matrice quadrata $n \times n$ viene indicata nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (n \text{ è il numero di righe e di colonne}).$$

- Abbiamo già visto che una matrice è quadrata quando il numero di righe è uguale al numero di colonne.

**DEFINIZIONE**

**Ordine di una matrice quadrata**

Si chiama ordine di una matrice quadrata il numero delle sue righe (o delle colonne).

- La matrice precedente è di ordine $n$.

La **diagonale principale** è formata da tutti gli elementi che si trovano sulla diagonale di estremi $a_{11}$ e $a_{nn}$. Di conseguenza, tali elementi hanno i due indici uguali fra loro ($a_{11}$, $a_{22}$, $a_{33}$, …).

La **diagonale secondaria** è formata da tutti gli elementi che si trovano sulla diagonale di estremi $a_{1n}$ e $a_{n1}$. Di conseguenza, tali elementi hanno i due indici che sommati danno sempre $n + 1$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

▲ **Figura 1** La diagonale principale e la diagonale secondaria di una matrice quadrata.

**ESEMPIO**

Nella seguente matrice di ordine 3:

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 8 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

gli elementi della diagonale principale sono 5, 0, 3;
gli elementi della diagonale secondaria sono 8, 0, 2.

**DEFINIZIONE**

**Matrice identica**

Una matrice quadrata si dice identica (o matrice unità) quando gli elementi della diagonale principale sono tutti uguali a 1 e gli altri elementi sono nulli.

La matrice identica di ordine $n$ si indica con il simbolo $I_n$.

**ESEMPIO**

La seguente matrice di ordine 3 è identica: $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

# 2. OPERAZIONI CON LE MATRICI

## L'addizione e la sottrazione

**DEFINIZIONE**

La somma di due matrici $A$ e $B$ dello stesso tipo è una terza matrice $A + B$ dello stesso tipo i cui elementi sono la somma degli elementi corrispondenti delle due matrici.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+a' & b+b' & c+c' \\ d+d' & e+e' & f+f' \end{bmatrix}$$

- Non è possibile sommare due matrici che non siano dello stesso tipo. Per esempio **non** si può eseguire la seguente addizione:
$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$.

In simboli, se $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ sono due matrici dello stesso tipo, la loro somma è la matrice espressa come:

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}].$$

**ESEMPIO**

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & 4+3 \\ -2+4 & 3+2 \\ 6-5 & -5+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 2 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

La **differenza** di due matrici si può definire come somma della prima matrice con l'opposta della seconda:

$$A - B = A + (-B).$$

In simboli, se $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ sono due matrici dello stesso tipo, la loro differenza è la matrice

$$A - B = [a_{ij} - b_{ij}].$$

Poiché il risultato di un'addizione fra matrici dello stesso tipo è ancora una matrice dello stesso tipo, l'addizione è un'**operazione interna** nell'insieme delle matrici dello stesso tipo.

**ESEMPIO**

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & -2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 1 \\ 11 & -6 \end{bmatrix}$$

**Le proprietà dell'addizione**

L'addizione fra matrici dello stesso tipo gode delle seguenti proprietà:

- **proprietà associativa**:

$$A + (B + C) = (A + B) + C;$$

- **proprietà commutativa**:

$$A + B = B + A;$$

- ammette come **elemento neutro** la matrice nulla dello stesso tipo:

$$A + 0 = 0 + A = A$$

per ogni matrice $A$.

## La moltiplicazione di una matrice per un numero reale

**DEFINIZIONE**

Il prodotto di una matrice per un numero reale $k$ è una matrice dello stesso tipo i cui elementi sono tutti moltiplicati per $k$.

$$k \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \cdot a & k \cdot b & k \cdot c \\ k \cdot d & k \cdot e & k \cdot f \end{bmatrix}$$

In simboli, se $k$ è un numero reale e $A = [a_{ij}]$ una matrice qualsiasi, la matrice prodotto di $k$ per $A$ è espressa come

$$k \cdot A = [k \cdot a_{ij}].$$

**ESEMPIO**

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -5 & 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -15 & 12 & -9 \end{bmatrix}$$

## La moltiplicazione di una matrice riga per una matrice colonna

**DEFINIZIONE**

Il prodotto di una matrice riga $1 \times n$ per una matrice colonna $n \times 1$, con lo stesso numero di elementi, è una matrice formata da un solo elemento, ottenuto sommando fra loro i prodotti degli elementi corrispondenti.

$$[a \ \ b \ \ c] \cdot \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \\ = [a \cdot d + b \cdot e + c \cdot f]$$

- Se la matrice riga e la matrice colonna hanno un numero diverso di elementi **non** è possibile calcolare il prodotto.

- Gli elementi corrispondenti sono quelli che occupano lo stesso posto d'ordine nella riga e nella colonna.

**ESEMPIO**

Calcoliamo il prodotto di una matrice riga di 3 elementi per una matrice colonna, sempre di 3 elementi:

$$[2 \ \ 0 \ \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = [2 \cdot 3 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot (-2)] = [4].$$

Il risultato è la matrice $[4]$, di ordine 1.

## La moltiplicazione di una matrice $m \times n$ per una matrice $n \times p$

**DEFINIZIONE**

Il prodotto di una matrice $A$ di tipo $m \times n$ per una matrice $B$ di tipo $n \times p$ è una matrice $C$ di tipo $m \times p$, il cui elemento $c_{hk}$ è dato dal prodotto della riga numero $h$ della prima matrice per la colonna numero $k$ della seconda matrice.

$$\begin{array}{c} \\ \\ 3 \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \cdot \begin{array}{c} \begin{bmatrix} m & n & o \\ p & q & r \end{bmatrix} \\ \uparrow \\ 2 \end{array} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & e \cdot n + f \cdot q & \cdots \end{bmatrix} \\ \uparrow \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow 3 \end{array}$$

- Se la prima matrice ha un numero di colonne diverso dal numero di righe della seconda matrice, allora **non** è possibile calcolare il prodotto.

- Due matrici tali che il numero delle colonne della prima sia uguale al numero delle righe della seconda si dicono **conformabili**.

**ESEMPIO**

Calcoliamo il prodotto fra una matrice $2 \times 3$ e una matrice $3 \times 4$.
Scriviamo la matrice prodotto $2 \times 4$ con gli elementi generici:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}.$$

Determiniamo gli elementi della prima riga della matrice prodotto, moltiplicando la prima riga della prima matrice per tutte le colonne della seconda matrice.

Calcoliamo $a_{11}$:

$$[2 \;\; 0 \;\; 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = [2 \cdot 1 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 0] = [2].$$

Quindi $a_{11} = 2$. Analogamente, si ottiene: $a_{12} = 1$, $a_{13} = 4$ e $a_{14} = 3$.

Gli elementi della prima riga della matrice prodotto sono: 2, 1, 4, 3.

Determiniamo gli elementi della seconda riga della matrice prodotto, moltiplicando la seconda riga della prima matrice per tutte le colonne della seconda matrice. Calcoliamo $a_{21}$:

$$[-1 \;\; -2 \;\; 3] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = [-11].$$

Quindi $a_{21} = -11$. Analogamente: $a_{22} = 5$, $a_{23} = -17$ e $a_{24} = 5$.

Gli elementi della seconda riga sono: $-11$, 5, $-17$, 5.

Possiamo scrivere:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ -11 & 5 & -17 & 5 \end{bmatrix}.$$

Applicando la definizione di prodotto di matrici, possiamo anche calcolare la **potenza *n*-esima** di una matrice quadrata che definiamo:

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ volte}},$$

con $n \geq 2$.

Se $A$ e $B$ sono due matrici qualsiasi, è possibile eseguire i prodotti $A \cdot B$ e $B \cdot A$ se e solo se $A$ è di tipo $m \times n$ e $B$ di tipo $n \times m$. La condizione è verificata se, in particolare, $A$ e $B$ sono matrici quadrate dello stesso ordine.

### Le proprietà della moltiplicazione

In generale, la moltiplicazione fra matrici quadrate **non** è commutativa.

Se $A \cdot B = B \cdot A$, allora $A$ e $B$ si dicono **commutabili**. Per esempio, puoi verificare che le matrici $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ sono commutabili.

**ESEMPIO**

Consideriamo le seguenti matrici quadrate $2 \times 2$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo i prodotti:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi: $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Enunciamo le proprietà di cui gode la moltiplicazione fra matrici:

Supponiamo che per le matrici $A$, $B$ e $C$ sia possibile calcolare la somma e i prodotti indicati.

- **proprietà associativa**:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C);$$

- **proprietà distributiva** (a sinistra e a destra) della moltiplicazione rispetto all'addizione:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C; \qquad (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C.$$

Vale anche la proprietà distributiva della moltiplicazione di un numero rispetto all'addizione di matrici:

$$\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Inoltre, se $A$ e $B$ sono matrici quadrate di ordine $n$:

- la moltiplicazione per la matrice nulla ha per prodotto la matrice nulla:

  $$A \cdot O = O \cdot A = O;$$

- la moltiplicazione per la matrice identica ha per prodotto la matrice stessa:

  $$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A,$$

  quindi la matrice identica di ordine $n$, $I_n$, è l'**elemento neutro della moltiplicazione** fra matrici quadrate di ordine $n$;

**Non vale la legge di annullamento del prodotto**. Infatti, la matrice prodotto $A \cdot B$ può essere la matrice nulla $O$ senza che siano nulle le matrici $A$ e $B$.

**ESEMPIO**

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Non vale la legge di cancellazione**, ossia si può verificare che da $A \cdot B = A \cdot C$ non segua necessariamente che $B = C$.

**ESEMPIO**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad A \cdot B = A \cdot C = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \end{bmatrix}, \quad \text{ma } B \neq C.$$

# 3. I DETERMINANTI

A ogni matrice quadrata viene associato un numero reale, detto **determinante** della matrice. Per indicare il determinante di una matrice si può scrivere «det» davanti alla matrice, oppure scrivere gli stessi elementi della matrice, delimitati da due righe verticali.

- Il determinante si definisce soltanto per le matrici quadrate.

**ESEMPIO**

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Noi prendiamo in esame i determinanti delle matrici del primo, secondo e terzo ordine.

**DEFINIZIONE**

**Determinante di una matrice di ordine 1**

Il determinante di una matrice del primo ordine è uguale al numero stesso che compare nella matrice.

$$|a| = a$$

- Attenzione: non devi confondere il simbolo di determinante con quello di valore assoluto!

**ESEMPIO**

$$\det[-14] = |-14| = -14.$$

**DEFINIZIONE**

**Determinante di una matrice di ordine 2**

Il determinante di una matrice del secondo ordine è uguale alla differenza fra il prodotto dei due elementi della diagonale principale e il prodotto dei due elementi della diagonale secondaria.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

**ESEMPIO**

$$\det\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = -5 \cdot 7 - 3 \cdot (-1) = -32.$$

## Il determinante di una matrice di ordine 3

Il determinante di una matrice di ordine 3 si può calcolare con la **regola di Sarrus**.

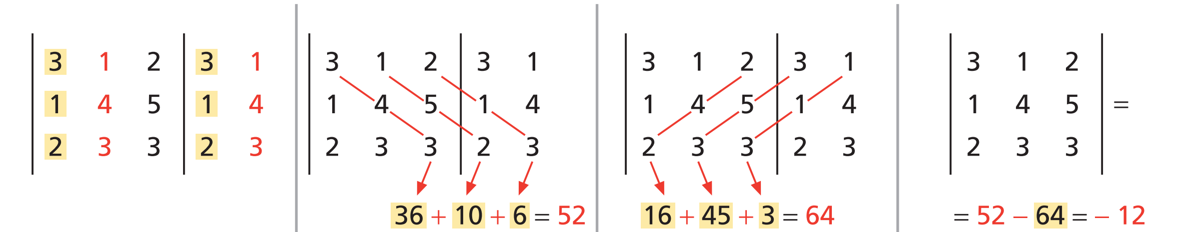
**ESEMPIO**

Calcoliamo il seguente determinante,

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix},$$

servendoci della regola di Sarrus, come illustrato nella figura 2.

▼ **Figura 2**




**a.** Ricopiamo a destra del determinante i termini delle prime due colonne della matrice.

**b.** Moltiplichiamo i termini lungo la diagonale principale e lungo le due diagonali parallele a essa; scriviamo i prodotti e li sommiamo.

**c.** Ripetiamo il procedimento moltiplicando i termini lungo la diagonale secondaria e lungo le due diagonali parallele a essa; scriviamo i prodotti e li sommiamo.

**d.** Il determinante è uguale alla differenza fra la prima e la seconda somma di prodotti.

In generale, per una matrice qualsiasi $A$ di ordine 3 lo schema è il seguente:

$$\begin{array}{c} + \quad + \quad + \quad - \quad - \quad - \\ \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right. \end{array}$$

e otteniamo che $\det A$ vale:

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

## ESPLORAZIONE: IL RANKING DI GOOGLE

**Alla base del successo di Google c'è un algoritmo matematico**
Si chiama PageRank e assegna a ogni pagina web un rango, ovvero un numero tra 0 e 1.
Il rango contribuisce a determinare la posizione della pagina nei risultati della ricerca effettuata su Google. Più il rango è alto, più alta sarà la posizione della pagina, e quindi maggiori le probabilità che sia consultata dall'utente.
Non descriveremo l'algoritmo matematico utilizzato per calcolare il PageRank, ma daremo un'idea di come le matrici possano essere utili nella costruzione del modello che descrive i collegamenti tra i diversi siti.

Uno dei criteri di importanza di una pagina web è dato dal numero di collegamenti o link verso di essa. Si suppone, infatti, che quanti più siti rimandino a una pagina, tanto più questa sia considerata autorevole.
In pratica, Google interpreta un collegamento dalla pagina $A$ alla pagina $B$ come un voto espresso dalla prima in merito alla seconda. Ma non si limita a calcolare il numero di voti, o collegamenti, assegnati a una pagina, prende anche in esame la pagina che ha assegnato il voto. I voti espressi da pagine importanti hanno più rilevanza e quindi contribuiscono a rendere importanti le pagine collegate.

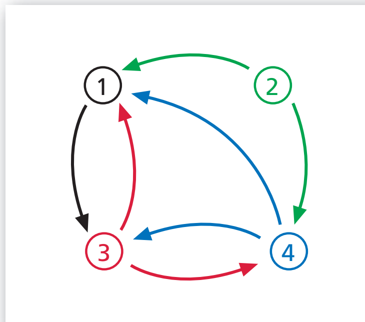
**Una matrice per descrivere il Web**
Supponiamo che nel Web ci siano $n$ pagine, che chiamiamo $P_1$, $P_2$, ..., $P_n$. Si dice che $P_j$ «punta» a $P_i$ se nella pagina $P_j$ c'è un link verso la pagina $P_i$. La rappresentazione grafica di questa definizione è un insieme di punti collegati tra loro, con una freccia che va dal vertice $j$ al vertice $i$ se la pagina $P_j$ punta alla pagina $P_i$.
Con la definizione data si può costruire una matrice quadrata $M$, formata solo da 0 e da 1:

$M_{i,j} = 1$ se $P_j$ punta a $P_i$,
$M_{i,j} = 0$ altrimenti.

Si tratta della matrice di adiacenza della rappresentazione grafica del Web.
Per esempio, per $n = 4$, si ha questa matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

quando i collegamenti sono quelli della seguente figura.




**IN CINQUE SLIDE**
Supponi che la figura precedente, invece di riferirsi a link fra siti, descriva la relazione «*a* preferisce studiare con *b*», relativa all'insieme di quattro compagni di classe. In questo caso il grafico che rappresenta la matrice descrive un fenomeno sociale e per questo si chiama **sociogramma**. Cerca in Internet esempi di sociogrammi e realizza una presentazione multimediale sull'argomento.

**Cerca nel Web**: matrice adiacenza sociogramma.

# LABORATORIO DI MATEMATICA
# LE MATRICI E I DETERMINANTI CON DERIVE

**Alcune funzioni di Derive sulle matrici**

| La funzione | serve per ottenere |
|---|---|
| DET($M$) | il determinante della matrice $M$. |
| ELEMENT($M$, $m$, $n$) | l'elemento della matrice $M$ di riga $m$ e di colonna $n$. |

| La funzione | crea una matrice formata dalla matrice $M$ |
|---|---|
| INSERT($r$, $M$, $n$) | con l'inserimento della riga $r$ dopo la riga di indice $n$. |
| REPLACE($r$, $M$, $n$) | con la sostituzione della riga di indice $n$ con la riga $r$. |
| DELETE($M$, $n$) | con la cancellazione della riga di indice $n$. |
| ADJOIN($r$, $M$) | con l'aggiunta della riga $r$. |
| APPEND($M$, $M1$) | saldata alla matrice $M1$. |

L'assegnazione M↓i↓j : = p sostituisce l'elemento della matrice $M$ di riga $j$ e colonna $j$ con l'elemento $p$.

## Esercitazioni

**Con l'aiuto di Derive, supponendo che $A$, $B$ e $C$ siano le matrici**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix},\quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -8 \end{bmatrix},$$

**stabilisci la validità o meno delle seguenti uguaglianze.**

**1** $A \cdot B = B \cdot A$ [falsa]

**2** $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ [vera]

**3** $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ [vera]

**4** $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$ [falsa]

**5** $(A - B) - C = A - (B - C)$ [falsa]

**6** Verifica che:

DET($A + B$) $\neq$ DET($A$) + DET($B$),
DET($A \cdot B$) = DET($B \cdot A$) = DET(A) $\cdot$ DET($B$),
DET($A$ / $B$) = DET($A$) / DET($B$),
con DET($B$) $\neq 0$.

# 1. LE MATRICI

Teoria a pag. 1

**1** Scrivi una matrice rettangolare $3 \times 4$ e indica gli elementi $a_{23}$, $a_{34}$, $a_{21}$.

**2** Scrivi tre matrici rettangolari di dimensioni $2 \times 3$, $2 \times 4$, $4 \times 2$.

**3** Scrivi tre matrici quadrate di dimensioni $1 \times 1$, $2 \times 2$, $3 \times 3$.

**4** Data la matrice $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 7 \\ 1 & -1 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 9 & -2 \end{bmatrix}$, indica: $a_{32}$, $a_{21}$, $a_{24}$, $a_{31}$, $a_{33}$, $a_{34}$.

**5** Determina $a$ e $b$ in modo che le matrici $\begin{bmatrix} a+2b & 4 \\ 2 & a+4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -a & 4 \\ 2 & 2a-3b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ siano uguali. $[a = 1, b = -1]$

**6** Determina $x$ e $y$ in modo che le matrici $\begin{bmatrix} -x+2y & -6 \\ x & -4 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} x+1 & -6 \\ 2y & 3x+2y \end{bmatrix}$ siano uguali. $\left[x = -1, y = -\frac{1}{2}\right]$

**7** Data la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ -1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, scrivi l'opposta.

**8** Determina $x$ e $y$ in modo che le matrici $\begin{bmatrix} 3y-8 & 0 \\ -1 & x+y \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} y+2x & 0 \\ 1 & x-2 \end{bmatrix}$ siano opposte. $[x = 0, y = 2]$

**9** Determina $a$, $b$ e $c$ in modo che le matrici $\begin{bmatrix} -3a+b & 0 \\ 2 & c-1 \\ -6 & \frac{1}{2}a-b \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} a+3 & 0 \\ -2 & 2 \\ 6 & 1-b \end{bmatrix}$ siano opposte. $[a = 2, b = 1, c = -1]$

## Le matrici quadrate

**10** Data la matrice $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, indica:

a) l'ordine, gli elementi della diagonale principale e gli elementi della diagonale secondaria;

b) gli elementi $a_{32}$ e $a_{21}$.

**11** VERO O FALSO?

a) Una matrice identica deve essere quadrata. V F

b) L'ordine di una matrice quadrata è il numero delle righe. V F

c) Se tutti gli elementi della diagonale principale di una matrice quadrata sono nulli, allora la matrice è la matrice nulla. V F

d) Se tutti gli elementi della diagonale principale di una matrice quadrata sono nulli, allora la matrice è la matrice identica. V F

# 2. OPERAZIONI CON LE MATRICI

Teoria a pag. 3

## L'addizione e la sottrazione

**12 ESERCIZIO GUIDA**

**Calcoliamo, se possibile, la somma e la differenza fra le matrici:**

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & -3\\ 0 & 2\end{bmatrix}.$$

Le matrici $A$ e $B$ sono entrambe matrici $3\times 2$ e perciò sono dello stesso tipo, quindi possiamo calcolarne la somma e la differenza:

$$A+B=\begin{bmatrix}0+1 & 1+2\\ 1+1 & -3+(-3)\\ -1+0 & 2+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -6\\ -1 & 4\end{bmatrix}.$$

$$A-B=\begin{bmatrix}0-1 & 1-2\\ 1-1 & -3-(-3)\\ -1-0 & 2-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 0 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix}.$$

**Esegui, quando è possibile, le addizioni fra le seguenti matrici.**

**13** $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 1 & 3\\ 0 & 3\end{bmatrix}.$ $\left[\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\\ -3 & 4\end{bmatrix}\right]$

**14** $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 3\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 2 & 2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-2 & 0 & -3\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}.$ $\left[\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ -1 & 3 & 0\end{bmatrix}\right]$

**15** $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\\ -2 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\\ -1 & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}.$ $\left[\begin{bmatrix}0 & 3\\ 1 & 2\\ -3 & 0\\ 3 & 2\end{bmatrix}\right]$

**16** $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -2\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$ [non si può eseguire l'addizione]

**Calcola, quando è possibile, le differenze $A-B$ fra le seguenti matrici.**

**17** $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & -1\\ -4 & 10\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}.$ $\left[\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\\ -5 & 10\end{bmatrix}\right]$

**18** $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & -3\\ -1 & -1 & 1\\ -1 & -2 & -2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 2 & 3\\ 0 & -2\end{bmatrix}.$ [non si può eseguire la sottrazione]

**19** $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}6 & 3 & 2\\ -1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}.$ $\left[\begin{bmatrix}-5 & 0 & -2\\ 3 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\right]$

**20** Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix},\quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

verifica la proprietà commutativa e la proprietà associativa dell'addizione mostrando che:

a) $A + B = B + A$; b) $B + C = C + B$; c) $(A + B) + C = A + (B + C)$.

## La moltiplicazione di una matrice per un numero reale

**21 ESERCIZIO GUIDA**

**Determiniamo il prodotto, del numero reale $-2$ per la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.**

Per determinare la matrice prodotto, moltiplichiamo tutti gli elementi per $-2$:

$$-2 \cdot A = -2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\cdot 1 & -2\cdot 1 & -2 \cdot 2 \\ -2\cdot 0 & -2\cdot 0 & -2\cdot(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

**Calcola i seguenti prodotti fra matrici e numeri reali.**

**22** $3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -6 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}\right]$

**23** $-5 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 2 & 2 \\ -5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} 0 & -15 & 20 \\ 15 & -10 & -10 \\ 25 & -5 & 5 \end{bmatrix}\right]$

**24** $-6 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 12 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} -6 & -12 & 12 \\ -12 & -6 & -24 \\ 12 & -24 & -72 \\ -12 & -6 & -6 \end{bmatrix}\right]$

**25** $-\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -10 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

---

**Date le matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, calcola le seguenti espressioni.**

**26** a) $A + B$; b) $A - 2B$. $\left[A + B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix};\ A - 2B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}\right]$

**27** a) $2A + B$; b) $-3A + 5B$. $\left[2A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 7 & -2 \end{bmatrix};\ -3A + 5B = \begin{bmatrix} -8 & 5 & 9 \\ 10 & -3 & -2 \\ 3 & -4 & -10 \end{bmatrix}\right]$

**Date le matrici $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, calcola le seguenti espressioni.**

**28** a) $A + B + C$; b) $A - 2B + 2C$. $\left[A + B + C = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix};\ A - 2B + 2C = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right]$

**29** a) $3A + B - 3C$; b) $2A + 3B - 4C$. $\left[3A + B - 3C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 14 & 6 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix};\ 2A + 3B - 4C = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 0 \\ 16 & 4 & -1 \\ -4 & 1 & -2 \end{bmatrix}\right]$

## La moltiplicazione di una matrice riga per una matrice colonna

**30** **ESERCIZIO GUIDA**

**Calcoliamo, se possibile, il prodotto fra le seguenti coppie di matrici riga e di matrici colonna:**

a) $[3 \;\; 0 \;\; 6 \;\; -2] \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$; b) $[2 \;\; 0 \;\; 1 \;\; -3] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

a) La matrice riga ha 4 elementi, mentre la matrice colonna ne ha 3: il numero di elementi è diverso, perciò non possiamo calcolare tale prodotto.

b) La matrice riga ha lo stesso numero di elementi della matrice colonna, e dunque possiamo effettuare l'operazione.
Per eseguire l'operazione fra le due matrici moltiplichiamo fra loro gli elementi corrispondenti nelle due matrici e quindi sommiamo i prodotti:

$$[2 \;\; 0 \;\; 1 \;\; -3] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = [2 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + (-3) \cdot 2] = [-8].$$

Il risultato è la matrice $[-8]$.

**Calcola, quando è possibile, i prodotti delle seguenti matrici riga per le matrici colonna.**

**31** $[1 \;\; 3 \;\; 2 \;\; -2] \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $[[-4]]$

**32** $[3 \;\; 3 \;\; 1] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $[[6]]$

**33** $[2 \;\; 0 \;\; 3 \;\; -1 \;\; -5] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ $[[-5]]$

**34** $[2 \;\; 0 \;\; -3] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ [non si può calcolare il prodotto]

**35** $[2 \;\; 0] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $[[0]]$

## La moltiplicazione di una matrice $m \times n$ per una matrice $n \times p$

**36** **ESERCIZIO GUIDA**

**Date le matrici** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ **e** $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$**, calcoliamo, se è possibile, il loro prodotto.**

Poiché il numero delle colonne di $A$ è 3 ed è uguale al numero di righe di $B$, allora possiamo calcolare il prodotto. La matrice prodotto ha lo stesso numero di righe di $A$, cioè 2, e lo stesso numero di colonne di $B$, cioè 2, e perciò è una matrice $2 \times 2$.

Scriviamo la matrice prodotto $C$ con gli elementi generici: $\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$.

Determiniamo gli elementi di $C$ con il prodotto riga per colonna.

$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-2) \cdot 2 = -3.$$
$$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} = 1 \cdot 3 + 0 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 = 1.$$
$$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 4.$$
$$c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} = 0 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = 0.$$

Possiamo scrivere:

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Calcola, quando è possibile, il prodotto delle seguenti coppie di matrici.**

**37** $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\right]$

**38** $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right]$

**39** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & 13 & 6 \end{bmatrix}\right]$

**40** $\begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 3 & -1 \\ -2 & 13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 & -4 \\ -1 & 10 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ [non si può calcolare il prodotto]

**41** $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 9 & 1 \\ 0 & 7 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} 6 & 11 & 3 \\ -7 & 3 & 1 \\ -10 & -6 & 0 \end{bmatrix}\right]$

**42** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} -2 \\ 11 \end{bmatrix}\right]$

**43** $\begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -6 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} -7 & -3 & 27 \end{bmatrix}\right]$

**44** $\begin{bmatrix} 0 & x & x \\ 1 & -x & 0 \\ -x & 0 & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2x & -x \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} x & -x \\ 2x & 0 \\ x - 2x^2 & x^2 \end{bmatrix}\right]$

**Date le seguenti matrici $A$ e $B$, determina i prodotti $A \cdot B$ e $B \cdot A$ verificando che la moltiplicazione fra matrici non gode della proprietà commutativa.**

**45** $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 10 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 9 \\ 7 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. $\left[A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 76 & 0 & -1 \\ 23 & 0 & -23 \end{bmatrix};\ B \cdot A = \begin{bmatrix} -18 & 45 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}\right]$

**46** $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. $\left[A \cdot B = \begin{bmatrix} 17 & 0 \\ 20 & 13 \end{bmatrix};\ B \cdot A = \begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 12 & 17 \end{bmatrix}\right]$

**47** Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcola $A^2$ e $A^3$. $\left[\begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 & -21 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right]$

**48** Trova $a$ in modo che sia: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2a & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. $[a = 1]$

**49** Determina $x$ in modo che: $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ x & 3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. $[x = -9]$

**50** Verifica che: $\begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -36 & 6 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

## RIEPILOGO Le operazioni con le matrici

**51** TEST Il prodotto delle matrici $A=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 0 & -2\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ è la matrice:

A $\begin{bmatrix}2 & 6\\ 0 & -2\end{bmatrix}$.

B $\begin{bmatrix}3 & -5\\ 0 & -1\end{bmatrix}$.

C $\begin{bmatrix}2 & -2\\ 0 & -2\end{bmatrix}$.

D $\begin{bmatrix}2 & 5\\ 0 & -2\end{bmatrix}$.

E $\begin{bmatrix}2 & -5\\ 0 & -2\end{bmatrix}$.

**52** TEST Data la matrice $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{bmatrix}$, se calcoliamo $2A^2$, otteniamo la matrice:

A $\begin{bmatrix}-2 & 20\\ -10 & 28\end{bmatrix}$.

B $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$.

C $\begin{bmatrix}-4 & 16\\ -10 & 20\end{bmatrix}$.

D $\begin{bmatrix}2 & 8\\ 2 & 32\end{bmatrix}$.

E $\begin{bmatrix}2 & 8\\ 1 & 16\end{bmatrix}$.

**Assegnate le matrici $A=\begin{bmatrix}2 & -8\\ 4 & 6\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -5 & -2\end{bmatrix}$, esegui le operazioni indicate.**

**53** $A-B$, $\quad -\frac{1}{2}A+2B$. $\left[\begin{bmatrix}-1 & -9\\ 9 & 8\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5 & 6\\ -12 & -7\end{bmatrix}\right]$

**54** $3(A+B)$, $-(B-A)$. $\left[\begin{bmatrix}15 & -21\\ -3 & 12\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1 & -9\\ 9 & 8\end{bmatrix}\right]$

**Date le matrici $A=[-2 \quad 4 \quad 1 \quad 0]$ e $B=[-1 \quad -5 \quad 3 \quad 6]$, esegui le operazioni indicate.**

**55** $-A-B$, $\qquad \frac{1}{3}(A-B)$. $\left[[3 \quad 1 \quad -4 \quad -6], \left[-\frac{1}{3} \quad 3 \quad -\frac{2}{3} \quad -2\right]\right]$

**56** $2A-3B$, $\qquad 4(A+B)$. $[[-1 \quad 23 \quad -7 \quad -18], [-12 \quad -4 \quad 16 \quad 24]]$

**Considera le matrici $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 4 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 2 & -6\end{bmatrix}$ e calcola le seguenti espressioni.**

**57** $A-B+C$, $\qquad 2(3B-C)+A$. $\left[\begin{bmatrix}-3 & -3\\ 8 & -7\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}9 & 11\\ -12 & 32\end{bmatrix}\right]$

**58** $A+2B-\frac{1}{2}C$, $\quad -2A-B-C$. $\left[\begin{bmatrix}3 & 3\\ -1 & 11\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 0\\ -8 & -1\end{bmatrix}\right]$

**Calcola, se è possibile, il prodotto delle seguenti matrici.**

**59** $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & -1\\ 0 & -3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 2 & -2 & -3\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix}-1 & 4 & -3 & -6\\ -5 & 8 & -9 & -12\\ -3 & 0 & -3 & 0\end{bmatrix}\right]$

**60** $\begin{bmatrix}9 & 1\\ 6 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & -4\\ -1 & 3\\ 5 & 1\end{bmatrix}$ [non si può calcolare]

**61** $\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\ 1 & -4 & 0\\ 0 & 10 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\ -1 & 0 & 5\\ 2 & 5 & 0\end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix}5 & 15 & 5\\ 4 & -1 & -18\\ -12 & -5 & 50\end{bmatrix}\right]$

**62** Date le matrici

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

verifica la proprietà associativa della moltiplicazione calcolando $(A\cdot B)\cdot C$ e $A\cdot(B\cdot C)$ e mostrando che le matrici ottenute sono uguali.

**63** Date le matrici

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},\quad I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad O=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

verifica che:

a) $A \cdot I = I \cdot A = A$; b) $A \cdot O = O \cdot A = O$.

Quali osservazioni puoi fare?

**64** Date le matrici $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, verifica che $A \cdot B$ è uguale alla matrice nulla.

Quali osservazioni puoi fare su questo risultato?

**Date le matrici $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, esegui le operazioni indicate.**

**65** $A^2$, $\quad A \cdot C$. $\quad\left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}\right]$

**66** $A \cdot B$, $\quad B \cdot A$. $\quad\left[\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\right]$

**67** $B \cdot C - B^2$, $\quad 2C^2 - \frac{1}{2}C \cdot A$. $\quad\left[\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{11}{2} & -\frac{3}{2} \\ -5 & 4 \end{bmatrix}\right]$

**68** $A \cdot (2B - C)$, $\quad A \cdot B \cdot C$. $\quad\left[\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 15 & -1 \end{bmatrix}\right]$

**69** $(A + B) \cdot (A - C)$, $\quad B \cdot C - A \cdot (B + C)$. $\quad\left[\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}\right]$

**70** Inserisci nel quadratino il segno di operazione che rende vera l'uguaglianza.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \square \begin{bmatrix} 7 & 5 & -3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 9 & 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -3 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -10 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$ $[-]$

**71** Data la matrice $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, calcola $A^2$ e $A^3$. $\quad\left[A^2=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}, A^3=\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ -19 & 27 \end{bmatrix}\right]$

**72** Date le matrici $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, calcola $A^2$, $B^2$, $A^2 - B^2$ e $(A + B)^2$.

$\left[\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -11 & -2 \\ -3 & -12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}\right]$

**73** Date le matrici $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, verifica che:

a) $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$;

b) $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.

**74** Date le matrici $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, verifica che:

a) $(A + B) \cdot (A - B) \neq A^2 - B^2$;

b) $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 + A \cdot B - B \cdot A - B^2$.

Determina la matrice $X$.

**75** $\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 0\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}9 & -1\\15 & -3\end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix}5 & -1\\2 & 0\end{bmatrix}\right]$

**76** $\begin{bmatrix}4 & 2\\3 & 7\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}4 & 2\\3 & 7\end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right]$

**77** $\begin{bmatrix}1 & 2\\7 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}=X\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\7 & 2\end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\-\frac{1}{3} & \frac{4}{3}\end{bmatrix}\right]$

**78** $X\cdot\begin{bmatrix}3 & 2 & 0\\-1 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 3\\-6 & -2 & 3\end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix}1 & 3\\-1 & 3\end{bmatrix}\right]$

Date le matrici $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\4 & -3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 2\\1 & -4\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}-1 & -5\\2 & 3\end{bmatrix}$, trova la matrice $X=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$ che verifica le seguenti uguaglianze.

**79** $-(A+X)=B-C.$ $\left[X=\begin{bmatrix}-2 & -8\\-3 & 10\end{bmatrix}\right]$

**80** $2A+B=C-3X.$ $\left[X=\begin{bmatrix}-1 & -3\\-\frac{7}{3} & \frac{13}{3}\end{bmatrix}\right]$

Nei seguenti esercizi determina i valori da sostituire alle incognite per rendere vera l'uguaglianza.

**81** $\begin{bmatrix}4 & 1 & 3\\0 & 1 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x & y\\0 & z\\t & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 1\\-2 & 1\end{bmatrix}$ $[x=1, y=0, z=1, t=1]$

**82** $\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\-2 & 0 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\-3\end{bmatrix}$ $[x=1, y=2]$

**83** $[x \quad x+1 \quad x+2]\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=[14]$ $[x=1]$

**84** $\begin{bmatrix}3 & 0 & -1\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x-1\\x\\x+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\8\end{bmatrix}$ $[x=4]$

# 3. I DETERMINANTI

Teoria a pag. 7

## Il determinante di una matrice 2 × 2

**85 ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo il determinante della matrice:

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & -3\end{bmatrix}.$$

Per ottenere il determinante eseguiamo la differenza fra il prodotto degli elementi della diagonale principale e il prodotto degli elementi della diagonale secondaria:

diagonale secondaria

$$\det\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & -3\end{bmatrix}=2\cdot(-3)-1\cdot1=-6-1=-7.$$

diagonale principale

**Calcola il determinante delle seguenti matrici di ordine 2.**

**86** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ [7]

**87** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ [2]

**88** $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ [19]

**89** $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ [2]

**90** $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ $\left[-\frac{5}{3}\right]$

**91** $\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{4} \\ \frac{8}{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ $\left[-\frac{1}{5}\right]$

**92** $\begin{bmatrix} a+b & a \\ a & a-b \end{bmatrix}$ $[-b^2]$

**93** $\begin{bmatrix} x+1 & x \\ x & x-1 \end{bmatrix}$ $[-1]$

**94** $\begin{bmatrix} x & 1 \\ 2x & x+2 \end{bmatrix}$ $[x^2]$

**95** $\begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} & 1 \\ -1 & 1-\sqrt{3} \end{bmatrix}$ $[-1]$

**96** $\begin{bmatrix} x\sqrt{2} & 1 \\ x & x\sqrt{2} \end{bmatrix}$ $[2x^2-x]$

## Il determinante di una matrice 3 × 3

**97 ESERCIZIO GUIDA**

**Calcoliamo, facendo uso della regola di Sarrus, il determinante della matrice**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 7 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Ricopiamo a destra della matrice i termini delle due prime colonne:

$$\left|\begin{matrix} 2 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 7 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 7 \end{matrix}$$

- Moltiplichiamo i termini della diagonale principale e delle due diagonali parallele a destra di tale diagonale:

  $2 \cdot 0 \cdot 1 = 0;$ $\quad 1 \cdot (-1) \cdot (-1) = 1;$ $\quad 9 \cdot 2 \cdot 7 = 126.$

  Sommiamo i tre prodotti ottenuti: $0 + 1 + 126 = 127$.

- Ripetiamo il procedimento moltiplicando i termini della diagonale secondaria e delle due parallele a destra di questa e scriviamo i prodotti:

  $-1 \cdot 0 \cdot 9 = 0;$ $\quad 7 \cdot (-1) \cdot 2 = -14;$ $\quad 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2.$

  Sommiamo i prodotti: $0 + (-14) + 2 = -12$.

- Il determinante è uguale alla differenza fra la prima e la seconda somma di prodotti:

  $\det A = 127 - (-12) = 139.$

**Calcola i determinanti delle seguenti matrici.**

**98** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $[-1]$

**99** $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ $[-19]$

**100** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 9 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $[-41]$

**101** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ $[-82]$

**102** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 8 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ $[-54]$

**103** $\begin{bmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & -a \end{bmatrix}$ $[-2a^2]$

**104** $\begin{bmatrix} x & 0 & x+1 \\ 1 & x & -2x \\ 2x+1 & x & 2 \end{bmatrix}$ [0]

**105** $\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ x & x & 0 \\ x & x & x \end{bmatrix}$ [$x^3$]

**106** $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ [0]

**107** $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ [0]

**108** $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ [0]

**109** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ [$-15$]

**110** $\begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ [9]

**111** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -4 \\ 5 & -6 & 0 \end{bmatrix}$ [16]

**112** $\begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix}$ [0]

**113** $\begin{bmatrix} x & -1 & x+1 \\ x & 1 & x \\ x & 0 & x \end{bmatrix}$ [$-x$]

**114** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix}$ [$-x$]

**Calcola i determinanti delle seguenti matrici e verifica che sono tutti uguali a 0. Quale proprietà puoi dedurre?**

**115** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

**116** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

**117** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

**118** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ -2 & -5 & 2 \end{bmatrix}$

**119** $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

**120** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 11 \\ -2 & -1 & 9 \end{bmatrix}$

**121** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

**122** $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 6 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

**123** Calcola il determinante della seguente matrice e di quella da essa ottenuta moltiplicando per $-2$ gli elementi della prima riga.

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ [11; $-22$]

**124** Calcola il determinante della seguente matrice e di quella da essa ottenuta moltiplicando per $-3$ gli elementi della prima colonna.

$\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$ [15; $-45$]

**125** Calcola il determinante della seguente matrice e di quella da essa ottenuta moltiplicando per 7 gli elementi della prima colonna.

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ [$-2$; $-14$]

**126** Calcola il determinante della seguente matrice e di quella da essa ottenuta moltiplicando per 5 gli elementi della terza riga.

$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ -6 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ [10; 50]

**127** Data la matrice $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, determina una seconda matrice ottenuta aggiungendo a ogni elemento della prima riga il corrispondente della seconda riga moltiplicato per 3 e verifica che le due matrici hanno lo stesso determinante. [$-1$]

**128** Data la matrice $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, determina una seconda matrice ottenuta aggiungendo a ogni elemento della prima riga il corrispondente della terza riga moltiplicato per $-2$ e verifica che le due matrici hanno lo stesso determinante. [$-3$]

**Per ognuna delle seguenti matrici, scrivi una matrice ottenuta scambiando fra loro due righe, calcolane i determinanti e verifica che sono di segno opposto.**

**129** $\begin{bmatrix} -2 & -6 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$ [−46; 46]

**130** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 10 & 0 \end{bmatrix}$ [−69; 69]

**Per ognuna delle seguenti matrici, scrivi una matrice ottenuta scambiando fra loro due colonne, calcolane i determinanti e verifica che sono di segno opposto.**

**131** $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 10 & 8 \end{bmatrix}$ [−4; 4]

**132** $\begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ [−36; 36]

**Per ciascuna delle seguenti coppie di matrici, calcola il prodotto e verifica che la matrice prodotto ha determinante uguale al prodotto dei determinanti delle matrici date.**

**133** $\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$ [−13; −11; 143]

**134** $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}.$ [−3; −2; 6]

**135** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$ [5; −11; −55]

**136** $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$ [10; 27; 270]

## RIEPILOGO I determinanti

**TEST**

**137** Se $A$ e $B$ sono due generiche matrici quadrate dello stesso ordine, quale delle seguenti uguaglianze è vera?

- **A** $A \cdot B = B \cdot A$.
- **B** $A - B = B - A$.
- **C** $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$.
- **D** $A + (A \cdot B) = 2A \cdot (A + B)$.
- **E** $(A \cdot B) - B = A - B$.

**138** $A$ e $B$ sono due matrici. In quale dei seguenti casi *non* è possibile eseguire il prodotto fra le matrici $A$ e $B$?

- **A** $A$ è una matrice quadrata di ordine 3 e $B$ è una matrice colonna con 3 elementi.
- **B** $A$ è una matrice riga con 3 elementi e $B$ è una matrice colonna con 3 elementi.
- **C** $A$ è una matrice riga con 2 elementi e $B$ è una matrice rettangolare $4 \times 2$.
- **D** $A$ è una matrice colonna con 4 elementi e $B$ è una matrice riga con 3 elementi.
- **E** $A$ e $B$ sono matrici quadrate di ordine 10.

**139** Il prodotto fra le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

è la matrice:

- **A** $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.
- **B** $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}$.
- **C** $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$.
- **D** $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$.
- **E** non si può calcolare.

**140** Il determinante della matrice $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ è:

- **A** 6.
- **B** 9.
- **C** −6.
- **D** 18.
- **E** −9.

**141** Se in una matrice quadrata si scambiano prima due righe e poi due colonne, che cosa succede al determinante?

- A Diventa nullo.
- B Non cambia.
- C Diventa doppio del determinante iniziale.
- D Diventa quadruplo del determinante iniziale.
- E Non è possibile rispondere poiché non si conoscono le righe e le colonne che sono state scambiate.

**142** Date due generiche matrici quadrate $A$ e $B$ dello stesso ordine, una sola delle seguenti uguaglianze è *falsa*. Quale?

- A $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$
- B $\det(A + B) = \det A + \det B$
- C $\det 2A = 4 \det A$
- D $\det(A^2) = (\det A)^2$
- E $\det(A \cdot B) = \det B \cdot \det A$

**143** Calcola il determinante del prodotto delle matrici: $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. [$-20$]

**144** Spiega il significato di «moltiplicazione righe per colonne fra matrici» e mostra, con un esempio numerico, che questa operazione non gode, in generale, della proprietà commutativa.

**145** Date due matrici $A$ di tipo $m \times n$ e $B$ di tipo $p \times q$, che relazioni devono esserci fra $m$, $n$, $p$, $q$ affinché si possano definire sia $A \cdot B$ sia $B \cdot A$? In tal caso, la moltiplicazione è commutativa? Fai un esempio.

**Calcola il determinante delle seguenti matrici.**

**146** $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \\ -5 & -6 & 1 \end{bmatrix}$ [$-26$]

**147** $\begin{bmatrix} x & x+1 & 0 \\ x+2 & 1 & x \\ 0 & x & 0 \end{bmatrix}$ [$-x^3$]

**148** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & 7 \\ 5 & 0 & 11 \end{bmatrix}$ [0]

**149** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ [0]

**150** $\begin{bmatrix} a & 2a & 0 \\ 3a^2 & -4a^2 & 5a^2 \\ -2a^3 & a^3 & -a^3 \end{bmatrix}$ [$-15a^6$]

**151** $\begin{bmatrix} x^3 & x^2 & 0 \\ 0 & x^2 & x \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$ [$x^6$]

**Verifica le seguenti uguaglianze.**

**152** $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 0 & x & 4 \\ 0 & 0 & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 7 & x & 0 \\ 19 & -21 & y \end{vmatrix}$

**153** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b+2 & c+5 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

**154** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix}$

**155** $\begin{vmatrix} a & a & 2a \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3a & 5a & 2a \end{vmatrix}$

**Date le matrici**

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix},$$

**rispondi alle seguenti richieste.**

**156** Calcola $\det(A+B+C)$. [$-20$]

**157** Calcola $\det(A\cdot B\cdot C)$. [0]

**158** Calcola $\det(B+C)\cdot A$. [0]

**159** Calcola $\det(A\cdot B-C)$. [0]

**160** Verifica se $\det A^2=(\det A)^2$. [sì]

**161** Verifica se $\det A\cdot B=\det B_T\cdot A_T$. [sì]

**Risolvi le seguenti equazioni.**

**162** $\begin{vmatrix}x & 13 & -17\\ 0 & x & 5\\ 0 & 0 & x\end{vmatrix}=8$ [2]

**163** $\begin{vmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 3x\\ x-2 & x-1 & 1\end{vmatrix}=11-6x$ [$-1$]

## RIEPILOGO Matrici e determinanti

**Date le matrici** $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$ **e** $B=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 3\\ 0 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix}$**, calcola le seguenti espressioni.**

**164** $A+B$; $B-A$. $\left[A+B=\begin{bmatrix}0 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 4 & 1 & 2\end{bmatrix};\ B-A=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 2 & -3 & 2\end{bmatrix}\right]$

**165** $A+3B$; $-2A+4B$. $\left[A+3B=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 9\\ 0 & 1 & 2\\ 10 & -1 & 6\end{bmatrix};\ -2A+4B=\begin{bmatrix}-3 & -1 & 12\\ 0 & -2 & 6\\ 10 & -8 & 8\end{bmatrix}\right]$

**Date le matrici** $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & -2\end{bmatrix}$**, calcola le seguenti espressioni.**

**166** $A\cdot(B+C)$; $A\cdot B-2C$. $\left[A\cdot(B+C)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix};\ A\cdot B-2C=\begin{bmatrix}1 & 7\\ -3 & 6\end{bmatrix}\right]$

**167** Determina la matrice $X$ nell'equazione: $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}-X=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 4 & 0\end{bmatrix}$. $\left[\begin{bmatrix}4 & 2\\ -1 & 5\end{bmatrix}\right]$

**168** $(A+B)\cdot(B-C)$; $A\cdot B+B\cdot C$. $\left[(A+B)\cdot(B-C)=\begin{bmatrix}-2 & 16\\ -8 & 10\end{bmatrix};\ A\cdot B+B\cdot C=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}\right]$

**169** Date le matrici $A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}0 & -3\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, verifica queste proprietà:

a) $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$;
b) $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$;
c) $(B+C)\cdot A=B\cdot A+C\cdot A$;
d) $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$;
e) $C\cdot(A+B)=C\cdot A+C\cdot B$.

**Calcola il determinante delle seguenti matrici.**

**170** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -6 \end{bmatrix}$ [$-8$]

**171** $\begin{bmatrix} a & 1 & 2a \\ 0 & a-1 & 1 \\ 2 & -a & -1 \end{bmatrix}$ [$-4a^2+5a+2$]

**172** Calcola il determinante del prodotto delle matrici $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ -\frac{5}{4} & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$. [14]

**173** Date le matrici $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,

a) verifica che $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;
b) calcola il determinante della matrice $A$ e il determinante della matrice $D = B + C$;
c) verifica che $\det A \cdot \det D = \det (A \cdot B + A \cdot C)$;
d) se $E = \begin{bmatrix} a & a \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, determina, se possibile, $a$ in modo tale che $E \cdot (A \cdot B + A \cdot C) = (A \cdot B + A \cdot C) \cdot E$.

[b) $\det A = 11$; $\det D = 8$; d) impossibile]

**174** Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

a) verifica che $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;

b) calcola il determinante della matrice $A$ e il determinante della matrice $D = B + C$;

c) verifica che $\det A \cdot \det D = \det (A \cdot B + A \cdot C)$;

d) se $E = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}$, determina $a$ in modo tale che $E \cdot (A \cdot B + A \cdot C) = (A \cdot B + A \cdot C) \cdot E$.

[b) $\det A = 5$; $\det D = -27$; d) impossibile]

**175** Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$,

and $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Compute $A + B$ and $3A - 2B$.
b) Compute $A \cdot C$ and $C \cdot A$.

(CAN *University of New Brunswick*, Math Test, 2006)

[a) $A + B = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$; $3A - 2B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 7 \\ -4 & -1 & -4 \end{bmatrix}$;
b) $A \cdot C = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$; $C \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$]

**176** If $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$,

find $A \cdot B$ and $B \cdot A$, where possible.

(CAN *University of New Brunswick*, Final Exam, 2003)

[$A \cdot B = \begin{bmatrix} -15 & 13 \\ 4 & 10 \\ 21 & 17 \end{bmatrix}$; $B \cdot A$ not possible]