MATEMATICA E STORIA

Quantità irrazionali

Nell'*Algebra* di Eulero del 1770 troviamo, con un simbolismo quasi identico al nostro, vari problemi che riguardano le equazioni irrazionali, o meglio i modi per rendere razionali espressioni radicali, sostituendo alla variabile opportuni valori.

a. Risolvi la seguente equazione rispetto a x (nota il modo in cui viene indicato il quadrato dell'incognita):

$$\sqrt{1+xx} = x+p.$$

b. Supponi che nell'equazione di prima $p = \frac{m}{n}$ sia un numero razionale, con m, n numeri interi positivi; ricava allora la seguente soluzione dell'equazione:

$$x = \frac{nn - mm}{2mn}.$$

c. Utilizzando quest'ultima uguaglianza, ricava la seguente:

$$1 + xx = \frac{n^4 + 2mmnn + m^4}{4mmnn}.$$

d. Mostra che $1 + x^2$ è il quadrato di un numero razionale riscrivendo in forma opportuna il secondo membro.

RISOLUZIONE

a. Il radicando è positivo per ogni valore di x. Elevando al quadrato entrambi i membri otteniamo:

$$1 + x^2 = x^2 + 2px + p^2 \text{ da cui } x = \frac{1-p^2}{2p}.$$

b. Sostituendo $\frac{m}{n}$ a p otteniamo:

$$x = \frac{1 - \frac{m^2}{n^2}}{2\frac{m}{n}} = \frac{\frac{n^2 - m^2}{n^2}}{\frac{2m}{n}} = \frac{n^2 - m^2}{2mn}.$$

c. $1 + x^2 = 1 + \left(\frac{n^2 - m^2}{2mn}\right)^2 = 1 + \frac{n^4 - 2n^2m^2 + m^4}{4m^2n^2} = \frac{4n^2m^2 + n^4 - 2n^2m^2 + m^4}{4m^2n^2} = \frac{n^4 + 2n^2m^2 + m^4}{4m^2n^2}$

d. $\frac{n^4 + 2n^2m^2 + m^4}{4m^2n^2} = \left(\frac{n^2 + m^2}{2mn}\right)^2$